

Theoretische Informatik II

Einheit 5.4

Elementare Berechenbarkeitstheorie I:

Grundkonzepte und ihre Eigenschaften



1. Berechenbarkeit axiomatisiert
2. Berechenbarkeit, Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit
3. Abschlusseigenschaften

- **Es gibt viele Fragen zur Berechenbarkeit**

- Welche Funktionen sind berechenbar und welche nicht?
- Welche Probleme sind (semi-)entscheidbar und welche nicht?
- **Abschlußeigenschaften**: wie kann man Lösungen wiederverwenden?
- **Grenzen des Machbaren**: was ist nicht mehr berechenbar?
Wie kann man nachweisen, daß ein Problem nicht lösbar ist?

- **Antworten dürfen nicht vom Modell abhängen**

- Alle Berechenbarkeitsmodelle sind gleich mächtig
- Berechenbarkeit, (semi-)Entscheidbarkeit, (Zeit-/Platz)Komplexität sollten allgemeingültige **Konzepte** sein

Formuliere Theorie modellunabhängig

ABSTRAHIERE VON KONKRETEN MODELLEN

- **Beweise mit konkreten Modellen sind mühsam**
 - Aufwendige Konstruktion der Lösung + Korrektheitsbeweis
 - Bei Unmöglichkeitsaussagen Betrachtung aller möglichen Maschinen
- **Formuliere Axiome der Berechenbarkeit**
 - Grundeigenschaften, die alle Berechenbarkeitsmodelle erfüllen müssen
 - Beweise Grundeigenschaften mit einem der Modelle
- **Stütze restliche Theorie nur noch auf die Axiome**
 - Beweise verwenden nur Axiome und bekannte berechenbare Funktionen und Konstruktionen
 - Sehr abstrakt, aber erheblich eleganter (“echte Theorie”)

Liefert allgemeine Theorie der Berechenbarkeit

VIER BERECHENBARKEITSKONZEPTE SIND ESSENTIELL

- **Berechenbarkeit** einer Funktion f

- Wir können eine Methode angeben, die f berechnet

- **Entscheidbarkeit** einer Menge M

- Wir können eine Methode angeben, die testet, ob ein bestimmtes Element zu M gehört oder nicht

- **Äquivalent zur Berechenbarkeit von χ_M** $\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- **Semi-Entscheidbarkeit** einer Menge M

- Wir können eine Methode angeben, die testet, ob ein bestimmtes Element zu M gehört, aber nicht immer anhält

- **Äquivalent zur Berechenbarkeit von ψ_M** $\psi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

- **Neu: Aufzählbarkeit** einer Menge M

- Wir können eine Methode angeben, welche alle Elemente von M schrittweise generiert

- D.h. M ist **Bild einer berechenbaren Funktion**

THEORIE BERECHENBARER FUNKTIONEN

- **Es reicht berechenbare Funktionen zu betrachten**
 - Die Konzepte **Entscheidbarkeit**, **Semi-Entscheidbarkeit**, **Aufzählbarkeit** können durch berechenbare Funktionen definiert werden
- **Berechenbarkeit auf Zahlen reicht aus**
 - Berechenbarkeitskonzepte auf Wörtern und Zahlen sind gleichwertig
 - Zahlen kann man als Wörter (binär oder anders) codieren
 - Wörter über einem Alphabet kann man systematisch numerieren
 - Es ist meist leichter, mit Zahlen zu arbeiten (z.B. Rechenzeit)
 - Programme und Daten sind als Zahlen codierbar
- **Einstellige Funktionen reichen aus**
 - Funktionen auf Zahlenpaaren und -listen sind einstellig simulierbar
z.B. ist $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ durch $f':\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ mit $f'\langle i, j \rangle := f(i, j)$ simulierbar

Formuliere Axiome der Theorie auf $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$

Berechenbare Funktionen sind effektiv numerierbar

Es gibt Funktionen $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ und $\Phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ mit

1. φ_i und Φ_i haben immer denselben Definitionsbereich

Intuition: $\varphi_i \hat{=} \varphi(i)$ ist die vom i -ten Programm berechnete Funktion

$\Phi_i \hat{=} \Phi(i)$ ist die zu φ_i gehörende Rechenzeitfunktion

2. Rechenzeit ist entscheidbar

– Man kann für beliebige $i, n, t \in \mathbb{N}$ testen ob $\Phi_i(n) = t$ ist oder nicht

3. Computer sind universelle Maschinen (UTM Theorem)

– Die Funktion $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $u\langle i, n \rangle = \varphi_i(n)$ ist berechenbar

– Eine Maschine kann alle Programme und Daten verarbeiten

4. Programme sind effektiv kombinierbar (SMN Theorem)

– Die Nummer des entstehenden Programms kann berechnet werden

– Es gibt eine berechenbare totale Funktion h mit $\varphi_{h\langle i, j \rangle} = \varphi_i \circ \varphi_j$

– Es gibt eine berechenbare totale Funktion s mit $\varphi_{s\langle m, n \rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i \rangle$

NUMERIERUNG VON TURINGMASCHINEN

● Turingmaschinen sind als Wörter codierbar

- Es reicht, Turingmaschinen mit $\Gamma = \{0, 1, B\}$ und $F = \{q_1\}$ zu betrachten
- Definiere $\text{code}(\delta(q, X)) \equiv q X p Y D$, falls $\delta(q, X) = (p, Y, D)$
- Codiere die Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ durch das Wort
 $\text{code}(\delta(q_0, 0)) \# \text{code}(\delta(q_0, 1)) \# \text{code}(\delta(q_0, B)) \# \dots \# \text{code}(\delta(q_n, B))$
- Alphabet ist $\Delta = \{q_0, \dots, q_n, 0, 1, B, L, R, \#\}$ (Binärcodierung auch möglich)

● Wörter über einem Alphabet sind numerierbar

- Bestimme **lexikographische Ordnung** der Wörter über $\Delta = \{x_1, \dots, x_n\}$
 $\epsilon < x_1 < \dots < x_n < x_1x_1 < x_1x_2 < \dots < x_nx_n < x_1x_1x_1 < \dots$
- Zähle entsprechend durch: $w_0 := \epsilon, w_1 := x_1, \dots, w_n := x_n, w_{n+1} := x_1x_1, \dots$

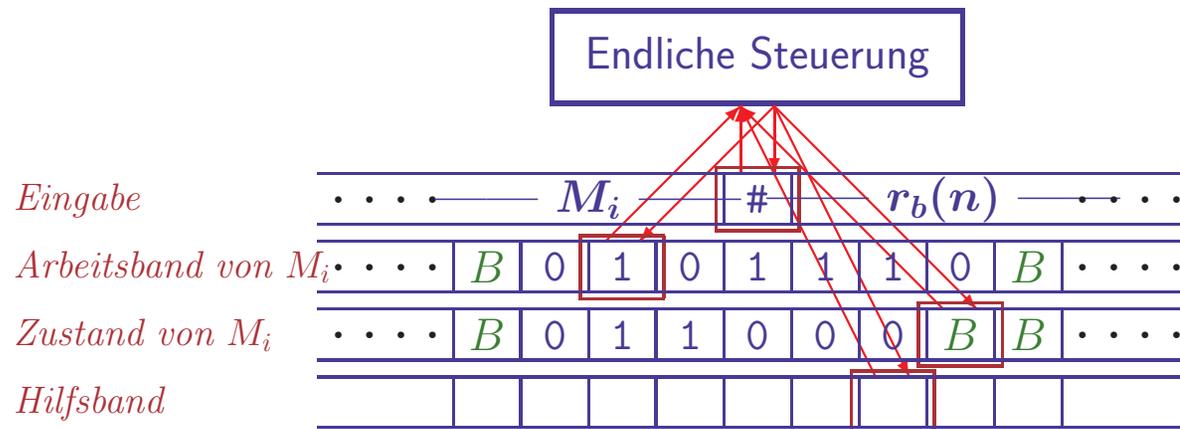
● Turingmaschinen sind (bijektiv) numerierbar

- Zähle Wörter über Δ auf und teste, ob sie Turingmaschinen codieren
- M_i ist die Turingmaschine, deren Codierung an i -ter Stelle erscheint
- Die Nummer i wird auch die **Gödelnummer** von M_i genannt

TURINGMASCHINEN ERFÜLLEN DIE KERNAXIOME

- **Berechenbare Funktionen sind numerierbar**
 - φ_i ist die von M_i berechnete (partielle) Funktion auf \mathbb{N}
 - $\varphi(i) := \varphi_i := r_b^{-1} \circ f_{M_i} \circ r_b$, wobei $r_b: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$ Binärcodierung von \mathbb{N}
 - Φ_i ist die zugehörige Schrittzahlfunktion
 - $\Phi(i)(n) := \Phi_i(n) := t_{M_i}(r_b(n))$
- **$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ ist surjektiv, aber nicht bijektiv**
 - Jede programmierbare Funktion hat einen Index
 - Jede berechenbare Funktion hat unendlich viele Programme
- **Für alle i gilt $\text{domain}(\Phi_i) = \text{domain}(\varphi_i)$ (Axiom 1)**
 - Per Konstruktion ist Φ_i auf den gleichen Eingaben definiert wie φ_i
- **$\{\langle i, n, t \rangle \mid \Phi_i(n) = t\}$ ist entscheidbar (Axiom 2)**
 - Simuliere Ausführung von $\varphi_i(n)$ für maximal t Schritte
 - Implementierung benutzt Variante der universellen Maschine (s.u.)

DIE UNIVERSELLE FUNKTION IST BERECHENBAR (UTM Theorem)



- **Benutze 3 Arbeitsbänder + Hilfsbänder**
 - Programmnummer i und Eingabewert n , binär codiert
 - Arbeitsband von M_i
 - Aktueller Zustand von M_i (auf Band, da Anzahl der Zustände nicht limitiert)
- **Generiere und simuliere Programm von M_i**
 - Generiere das Wort, das M_i über Δ codiert; schreibe es auf Band 1
 - Kopiere $r_b(n)$ auf Band 2 und schreibe q_0 auf Band 3
 - **Simuliere Einzelschritte** von M_i durch Aufsuchen der Befehle auf Band 1
 - Terminiert M_i (Zustand q_1), kopiere die Ausgabe von Band 2 auf Band 1

$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $u\langle i, n \rangle = \varphi_i(n)$ ist berechenbar (Axiom 3)

DAS ÜBERSETZUNGSLEMMA (SMN Theorem)

Es gibt eine berechenbare totale Funktion s mit
 $\varphi_{s\langle m,n \rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i \rangle$ für alle $m, n, i \in \mathbb{N}$ (Axiom 4)

- **Konstruiere eine Turingmaschine M für s :**
 - Auf dem Eingabeband stehe die Codierung einer Zahl $\langle m, n \rangle$
 - Konstruiere auf Hilfsband 1 die Codierung der m -ten Turingmaschine M_m
 - Konstruiere auf Hilfsband 2 die Codierung einer Maschine $M_{\langle \rangle}$, welche bei Eingabe einer Zahl i den Wert $f_{M_{\langle \rangle}}(i) = \langle n, i \rangle$ berechnet.
 - Konstruiere auf Hilfsband 3 den Code einer Maschine, welche bei Eingabe einer Zahl i zunächst $M_{\langle \rangle}$ simuliert und M_m auf das Ergebnis anwendet.
 - Berechne die Gödelnummer der so aus $\langle m, n \rangle$ konstruierten Maschine
- **Setze $s := f_M$**
 - s ist per Konstruktion berechenbar
 - s ist total, weil M für jede Eingabe $\langle m, n \rangle$ ein Ergebnis produziert
 - Es gilt $\varphi_{s\langle m,n \rangle}(i) = f_{M_m}(f_{M_{\langle \rangle}}(i)) = \varphi_m\langle n, i \rangle$

KONSEQUENZEN VON UTM UND SMN THEOREM

- Für jede berechenbare Funktion f gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h(n)}(i) = f\langle n, i \rangle$ für alle $n, i \in \mathbb{N}$

Beweis: wenn $f = \varphi_m$ ist, so wähle $h(i) := s\langle m, n \rangle$

- Berechenbare Funktionen sind effektiv kombinierbar

Es gibt eine berechenbare totale Funktion h mit $\varphi_{h\langle i, j \rangle} = \varphi_i \circ \varphi_j$

Intuitiv: h berechnet die Gödelnummer der Kombination von M_i und M_j

Beweis: die Funktion f mit $f\langle \langle i, j \rangle, x \rangle := \varphi_i(\varphi_j(x))$ ist berechenbar

Also gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h\langle i, j \rangle}(x) = f\langle \langle i, j \rangle, x \rangle = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x)$

- Es gibt berechenbare totale Funktionen f, g mit

- $\varphi_{f(i)}(n) = \varphi_i(n) + 1$ für alle i, n

- $\varphi_{g\langle i, j \rangle}(n) = \varphi_i(n) + \varphi_j(n)$ für alle i, j, n

⋮

REKURSIONS- UND SELBSTREPRODUKTIONSTHEOREM

TECHNISCHE AUSSAGEN MIT VIELFACHEN ANWENDUNGEN

- **Zu jeder berechenbaren totalen Funktion f gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_{f(n)}(x) = \varphi_n(x)$ für alle x**

Die Funktion g mit $g\langle i, x \rangle := \varphi_{u\langle i, i \rangle}(x) = u\langle u\langle i, i \rangle, x \rangle$ ist berechenbar.

Also gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $g\langle i, x \rangle = \varphi_{h(i)}(x)$

Ebenso gibt es ein $h' \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h'(i)}(x) = g'\langle i, x \rangle := u\langle i, h(x) \rangle = \varphi_i(h(x))$.

Wähle $n = h(h'(j))$, wobei j die Gödelnummer von f ist.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } \varphi_{f(n)}(x) &= \varphi_{f(h(h'(j)))}(x) = \varphi_{\varphi_j(h(h'(j)))}(x) = \varphi_{\varphi_{h'(j)}(h'(j))}(x) \\ &= \varphi_{u\langle h'(j), h'(j) \rangle}(x) = g\langle h'(j), x \rangle = \varphi_{h(h'(j))}(x) = \varphi_n(x) \end{aligned}$$

Anmerkung: $h \circ h'$ ist eine Art universeller Fixpunktkombinator für berechenbare Funktionen

- **Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n(x) = n$ für alle x**

Es gibt ein $f \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{f(i)}(x) = g\langle i, x \rangle := i$ für alle i, x .

Für f gibt es nach dem Rekursionssatz ein n mit $\varphi_n(x) = \varphi_{f(n)}(x) = n$.

BERECHENBARKEITSKONZEPTE – ABSTRAKT DEFINIERT

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist **berechenbar** (auch **(partiell) rekursiv**)
 - Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ (Es gibt ein Programm zur Berechnung von f)
 - f ist **total rekursiv**, wenn f berechenbar und total ist
- $M \subseteq \mathbb{N}$ ist **entscheidbar** (auch **rekursiv**)
 - Die (totale) charakteristische Funktion χ_M ist berechenbar
- $M \subseteq \mathbb{N}$ ist **semi-entscheidbar**
 - Die partielle charakteristische Funktion ψ_M ist berechenbar
- $M \subseteq \mathbb{N}$ ist **(rekursiv) aufzählbar**
 - $M = \emptyset$ oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion f
mit $M = \text{range}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i) = n\}$

Konzepte für andere Grundmengen analog

ANMERKUNGEN ZUR AUFZÄHLBARKEIT

- **Nicht identisch mit Abzählbarkeit**

- M abzählbar, wenn es eine surjektive Funktion f von \mathbb{N} nach M gibt
- $M \subseteq \mathbb{N}$ aufzählbar, wenn M Bild einer berechenbaren Funktion ist

- **Aufzählungen müssen nicht injektiv sein**

- Die Funktion g mit $g(n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf

- **Jede Menge hat verschiedene Aufzählungen**

- $h = \lambda n.2n+1$ zählt alle ungeraden Zahlen genau einmal auf

- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**

- $M = \{x_0, \dots, x_n\}$ ist Bild von f mit $f(n) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$

- f ist primitiv rekursiv, also berechenbar

- **Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen**

CHARAKTERISIERUNGEN VON AUFZÄHLBARKEIT

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. M ist aufzählbar

2. $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

– $\text{range}(f) = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, f nicht notwendigerweise total

3. M ist semi-entscheidbar

4. $M = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

– $\text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$

Aussage gilt analog für $M \subseteq \Sigma^*$, $M \subseteq \mathbb{N}^k$, ...

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ DURCH RINGSCHLUSS

- **M aufzählbar $\Rightarrow M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares f**
 - Es sei M aufzählbar
 - Falls $M = \emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_{\perp})$, wobei $f_{\perp}(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ✓
 - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f ✓
- **$M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares $f \Rightarrow M$ semi-entscheidbar**
 - Es sei $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, möglicherweise partielles f
 - Dann ist $m \in M$ genau dann, wenn $m = f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$
 - Für $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ ist $\psi_M(m) = \text{sign}(\min\{\langle n, t \rangle \mid \Phi_i(n) = t \wedge \varphi_i(n) = m\})$
Standardtrick: simultanes Durchzählen von Eingabewerten und Rechenzeitschranken
 - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist ψ_M berechenbar ✓
- **M semi-entscheidbar $\Rightarrow M = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares f**
 - Es sei M semi-entscheidbar.
 - Dann ist ψ_M berechenbar und $M = \{i \in \mathbb{N} \mid \psi_M(i) = 1\} = \text{domain}(\psi_M)$ ✓

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ DURCH RINGSCHLUSS (II)

- $M = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f \Rightarrow M$ aufzählbar

- Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f

- Falls $M = \emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar

✓

- Andernfalls gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$

- Wir konstruieren eine berechenbare totale Funktion g mit $M = \text{range}(g)$

$$\text{Es sei } g\langle n, t \rangle = \begin{cases} n & \text{falls } \Phi_i(n) = t, \\ n_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Standardtrick: Zerlegen der Eingabe mit Umkehrfunktionen der Standardtupelfunktion

- Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist g total und berechenbar

- $M = \text{range}(g)$: Es gilt $n \in M = \text{domain}(\varphi_i)$

- \Leftrightarrow es gibt es eine Rechenzeit t mit $\Phi_i(n) = t$

- $\Leftrightarrow g\langle n, t \rangle = n$

- $\Leftrightarrow n \in \text{range}(g)$

✓

WICHTIGE ENTSCHIEDBARE UND AUFZÄHLBARE MENGEN

- Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbar
 - $\text{range}(f)$ ist aufzählbar Charakterisierung #2
 - $\text{domain}(f)$ ist aufzählbar Charakterisierung #4
 - $\text{graph}(f)$ ist aufzählbar (entscheidbar, wenn f total ist)
Bei Eingabe $\langle i, j \rangle$ teste $f(i)=j$ (hält immer, wenn f total)
- $\{ \langle i, n, t \rangle \mid \Phi_i(n)=t \}$ ist entscheidbar Axiom 2
- $\{ \langle i, n, y \rangle \mid \varphi_i(n)=y \}$ ist aufzählbar
 - Graph der universellen Funktion
- $H = \{ \langle i, n \rangle \mid n \in \text{domain}(\varphi_i) \}$ ist aufzählbar
 - H ist Definitionsbereich der universellen Funktion (Halteproblem)
- $S = \{ i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i) \}$ ist aufzählbar
 - S ist Definitionsbereich von $\lambda i.u\langle i, i \rangle$ (Selbstanwendbarkeitsproblem)

AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHIEDBARKEIT

$M \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow M$ und \overline{M} aufzählbar

\Rightarrow Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbar

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und \overline{M} aufzählbar ✓

\Leftarrow Seien M und \overline{M} aufzählbar

Falls $M = \emptyset$ oder $\overline{M} = \emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar ✓

Andernfalls $M = \text{range}(f)$ und $\overline{M} = \text{range}(g)$ wobei f, g total berechenbar

Definiere $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch $h(n) = \min\{i \mid f(i)=n \vee g(i)=n\}$

Dann ist h berechenbar und total, da $n \in M$ oder $n \in \overline{M}$ für jedes n gilt.

Damit ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(h(n)) = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar ✓

AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHIEDBARKEIT II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**

- Die Umkehrung gilt nicht

(Beispiel folgt in §5.5)

- **Jede endliche Menge ist entscheidbar (und aufzählbar)**

- Für $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n=x_1 \vee \dots \vee n=x_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar

✓

- **$M \subseteq \mathbb{N}$ ist aufzählbar g.d.w. es ein entscheidbares $M' \subseteq \mathbb{N}$**

- gibt mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in M'\}$**

(Projektionssatz)

- \Rightarrow : Falls $M = \emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in \emptyset\}$

✓

- Andernfalls ist $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f

- und $\text{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in \text{graph}(f)\}$

✓

- \Leftarrow : Es sei $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in M'\}$ für ein entscheidbares M'

- Dann ist $\psi_M(y) = \text{sign}(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \langle n, y \rangle \in M'\} + 1)$

- $= \text{sign}(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \chi_{M'}(n, y) = 1\} + 1)$ berechenbar

✓

Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

● $M \cup M'$: Vereinigung

- Seien $M = \text{range}(h)$ und $M' = \text{range}(h')$ aufzählbar
- Definiere g durch $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist g berechenbar und $\text{range}(g) = M \cup M'$ aufzählbar

● $M \cap M'$: Durchschnitt

- Es ist $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$. also ist $\psi_{M \cap M'}$ berechenbar
In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn $n \in M \cap M'$

● $f(M)$: Bild einer berechenbaren Funktion

- Definiere g durch $g(n) = f(h(n))$
- Dann ist g berechenbar und $\text{range}(g) = f(M)$ aufzählbar

● $f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren Funktion

- Es ist $\psi_{f^{-1}(M)}(n) = \psi_M(f(n))$. Also ist $\psi_{f^{-1}(M)}$ berechenbar.

Abschluß unter Komplement oder Differenz gilt nicht

Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter

- $M \cup M'$: Vereinigung

- Beweisidee: $\chi_{M \cup M'}(n) = \text{sign}(\chi_M(n) + \chi_{M'}(n))$.

- $M \cap M'$: Durchschnitt

- Beweisidee: $\chi_{M \cap M'}(n) = \chi_M(n) * \chi_{M'}(n)$.

- \overline{M} : Komplement

- Beweisidee: $\chi_{\overline{M}}(n) = 1 - \chi_M(n)$.

- $M - M'$: Differenz

- Beweisidee: $M - M' = M \cap \overline{M'}$

- $f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren totalen Funktion

- Beweisidee: $\chi_{f^{-1}(M)}(n) = \chi_M(f(n))$.

Abschluß unter Bild berechenbarer Funktionen gilt nicht

RÜCKBLICK ELEMENTARE BERECHENBARKEITSTHEORIE

- **Es gibt 3 Grundkonzepte der Berechenbarkeit**

- Berechenbare Funktionen, entscheidbare und aufzählbare Mengen
- Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen

Alle Konzepte sind beschreibbar durch berechenbare Funktionen auf \mathbb{N}

- Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter \cup, \cap, f, f^{-1}
- Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup, \cap, \bar{}, -, f^{-1}$

- **Alle Berechenbarkeit basiert auf nur 4 Axiomen**

1. Numerierbarkeit von berechenbaren Funktionen und ihren Rechenzeiten

Es gibt Funktionen $\varphi, \Phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$, so daß φ_i und Φ_i gleiche Definitionsbereiche haben

2. Rechenzeit $\Phi_i(n)=t$ ist entscheidbar

3. Die universelle Funktion $u\langle i, n \rangle := \varphi_i(n)$ ist berechenbar

4. Berechenbare Funktionen sind effektiv kombinierbar (SMN Theorem)

Jedes Berechenbarkeitsmodell erfüllt diese Axiome

Mehr Details in Vossen & Witt §9 und den dort angegebenen Referenzen