Theoretische Informatik II

Einheit 5.4

Elementare Berechenbarkeitstheorie I:

Grundkonzepte und ihre Eigenschaften

1. Berechenbarkeit axiomatisiert
2. Berechenbarkeit, Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit
3. Abschlußeigenschaften

Elementare Berechenbarkeitstheorie

- **Es gibt viele Fragen zur Berechenbarkeit**
  - Welche Funktionen sind berechenbar und welche nicht?
  - Welche Probleme sind (semi-)entscheidbar und welche nicht?
  - Abschlußeigenschaften: wie kann man Lösungen wiederverwenden?
  - Grenzen des Machbaren: was ist nicht mehr berechenbar?
    Wie kann man nachweisen, daß ein Problem nicht lösbar ist?
- **Antworten dürfen nicht vom Modell abhängen**
  - Alle Berechenbarkeitsmodelle sind gleich mächtig
  - Berechenbarkeit, (semi-)Entscheidbarkeit, (Zeit-/Platz)Komplexität sollten allgemeingültige Konzepte sein

Formuliere Theorie modellunabhängig

Abstrahiere von konkreten Modellen

- **Beweise mit konkreten Modellen sind mühsam**
  – Aufwendige Konstruktion der Lösung + Korrektheitsbeweis
  – Bei Unmöglichkeitsaussagen Betrachtung aller möglichen Maschinen
- **Formuliere Axiome der Berechenbarkeit**
  – Grundeigenschaften, die alle Berechenbarkeitsmodelle erfüllen müssen
  – Beweise Grundeigenschaften mit einem der Modelle
- **Stütze restliche Theorie nur noch auf die Axiome**
  – Beweise verwenden nur Axiome und bekannte berechenbare Funktionen und Konstruktionen
  – Sehr abstrakt, aber erheblich eleganter ("echte Theorie")

Liefert allgemeine Theorie der Berechenbarkeit

Vier Berechenbarkeitskonzepte sind essentiell

- **Berechenbarkeit einer Funktion f**
  - Wir können eine Methode angeben, die f berechnet
- **Entscheidbarkeit einer Menge M**
  - Wir können eine Methode angeben, die testet, ob ein bestimmtes Element zu M gehört oder nicht
  - **Äquivalent zur Berechenbarkeit von χ_M** $\quad \chi_M(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in M, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$
- **Semi-Entscheidbarkeit einer Menge M**
  - Wir können eine Methode angeben, die testet, ob ein bestimmtes Element zu M gehört, aber nicht immer anhält
  - **Äquivalent zur Berechenbarkeit von ψ_M** $\quad \psi_M(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in M, \\ \perp \text{sonst} \end{cases}$
- **Neu: Aufzählbarkeit einer Menge M**
  - Wir können eine Methode angeben, welche alle Elemente von M schrittweise generiert
  - D.h. **M ist Bild einer berechenbaren Funktion**

Theorie berechenbarer Funktionen

- **Es reicht berechenbare Funktionen zu betrachten**
  - Die Konzepte Entscheidbarkeit, Semi-Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit können durch berechenbare Funktionen definiert werden
- **Berechenbarkeit auf Zahlen reicht aus**
  - Berechenbarkeitskonzepte auf Wörtern und Zahlen sind gleichwertig
    - Zahlen kann man als Wörter (binär oder anders) codieren
    - Wörter über einem Alphabet kann man systematisch numerieren
  - Es ist meist leichter, mit Zahlen zu arbeiten (z.B. Rechenzeit)
  - Programme und Daten sind als Zahlen codierbar
- **Einstellige Funktionen reichen aus**
  - Funktionen auf Zahlenpaaren und -listen sind einstellig simulierbar
    z.B. ist $f{:}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $f'{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $f'\langle i,j\rangle := f(i,j)$ simulierbar

Formuliere Axiome der Theorie auf $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Kernaxiome der Berechenbareit auf $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Berechenbare Funktionen sind effektiv numerierbar

Es gibt Funktionen $\varphi:\mathbb{N}\to\mathcal{R}$ und $\Phi:\mathbb{N}\to\mathcal{R}$ mit

1. φ_i und Φ_i haben immer denselben Definitionsbereich

Intuition: $\varphi_i \hat{=} \varphi(i)$ ist die vom i-ten Programm berechnete Funktion

$\Phi_i \hat{=} \Phi(i)$ ist die zu φ_i gehörende Rechenzeitfunktion

2. Rechenzeit ist entscheidbar

– Man kann für beliebige $i, n, t \in \mathbb{N}$ testen ob $\Phi_i(n) = t$ ist oder nicht

3. Computer sind universelle Maschinen (UTM Theorem)

– Die Funktion $u:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $u\langle i, n\rangle = \varphi_i(n)$ ist berechenbar

– Eine Maschine kann alle Programme und Daten verarbeiten

4. Programme sind effektiv kombinierbar (SMN Theorem)

– Die Nummer des entstehenden Programms kann berechnet werden

– Es gibt eine berechenbare totale Funktion h mit $\varphi_{h\langle i,j\rangle} = \varphi_i \circ \varphi_j$

– Es gibt eine berechenbare totale Funktion s mit $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i\rangle$

Numerierung von Turingmaschinen

- **Turingmaschinen sind als Wörter codierbar**
  - Es reicht, Turingmaschinen mit $\Gamma=\{0,1,B\}$ und $F=\{q_1\}$ zu betrachten
  - Definiere $\mathrm{code}(\delta(q,X)) \equiv q\,X\,p\,Y\,D$, falls $\delta(q,X)=(p,Y,D)$
  - Codiere die Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ durch das Wort

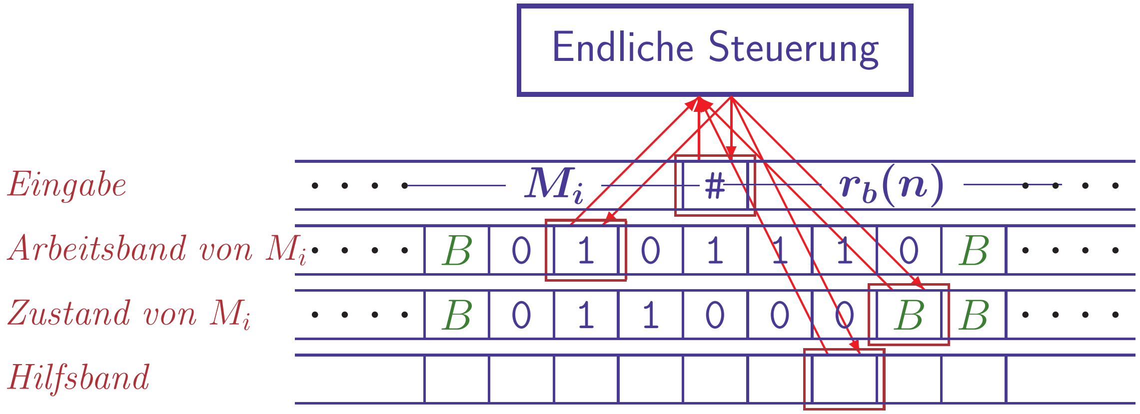
    $\mathrm{code}(\delta(q_0,0))\#\mathrm{code}(\delta(q_0,1))\#\mathrm{code}(\delta(q_0,B))\#\ldots\#\mathrm{code}(\delta(q_n,B))$
  - Alphabet ist $\Delta = \{q_0,..,q_n,0,1,B,L,R,\#\}$ (Binärcodierung auch möglich)
- **Wörter über einem Alphabet sind numerierbar**
  - Bestimme lexikographische Ordnung der Wörter über $\Delta = \{x_1,..,x_n\}$

    $\epsilon < x_1 < \ldots < x_n < x_1x_1 < x_1x_2 < \ldots < x_nx_n < x_1x_1x_1 < \ldots$
  - Zähle entsprechend durch: $w_0{:=}\epsilon,\ w_1{:=}x_1,\ ..\ w_n{:=}x_n,\ w_{n+1}{:=}x_1x_1,\ \ldots$
- **Turingmaschinen sind (bijektiv) numerierbar**
  - Zähle Wörter über Δ auf und teste, ob sie Turingmaschinen codieren
  - $\boldsymbol{M_i}$ ist die Turingmaschine, deren Codierung an i-ter Stelle erscheint
  - Die Nummer i wird auch die **Gödelnummer** von M_i genannt

Turingmaschinen erfüllen die Kernaxiome

- **Berechenbare Funktionen sind numerierbar**
  - $\boldsymbol{\varphi_i}$ ist die von M_i berechnete (partielle) Funktion auf $\mathbb{N}$
    - $\varphi(i){:=}\varphi_i := r_b^{-1}\circ f_{M_i}\circ r_b$, wobei $r_b{:}\mathbb{N}{\to}\{0,1\}^*$ Binärcodierung von $\mathbb{N}$
  - $\boldsymbol{\Phi_i}$ ist die zugehörige Schrittzahlfunktion
    - $\Phi(i)(n) := \Phi_i(n) := t_{M_i}(r_b(n))$
- **$\varphi{:}\mathbb{N}{\longrightarrow}\mathcal{R}$ is surjektiv, aber nicht bijektiv**
  - Jede programmierbare Funktion hat einen Index
  - Jede berechenbare Funktion hat unendlich viele Programme
- **Für alle i gilt domain(Φ_i)=domain(φ_i)** (Axiom 1)
  - Per Konstruktion ist Φ_i auf den gleichen Eingaben definiert wie φ_i
- **$\{\langle i,n,t\rangle \mid \Phi_i(n){=}t\}$ ist entscheidbar** (Axiom 2)
  - Simuliere Ausführung von $\varphi_i(n)$ für maximal t Schritte
  - Implementierung benutzt Variante der universellen Maschine (s.u.)

DIE UNIVERSELLE FUNKTION IST BERECHENBAR (UTM Theorem)



- **Benutze 3 Arbeitsbänder + Hilfsbänder**
  - Programmnummer i und Eingabewert n, binär codiert
  - Arbeitsband von M_i
  - Aktueller Zustand von M_i (auf Band, da Anzahl der Zustände nicht limitiert)
- **Generiere und simuliere Programm von M_i**
  - Generiere das Wort, das M_i über Δ codiert; schreibe es auf Band 1
  - Kopiere $r_b(n)$ auf Band 2 und schreibe q_0 auf Band 3
  - Simuliere Einzelschritte von M_i durch Aufsuchen der Befehle auf Band 1
  - Terminiert M_i (Zustand q_1), kopiere die Ausgabe von Band 2 auf Band 1

$\boldsymbol{u}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ **mit** $\boldsymbol{u\langle i,n\rangle=\varphi_i(n)}$ **ist berechenbar** (Axiom 3)

DAS ÜBERSETZUNGSLEMMA (SMN Theorem)

Es gibt eine berechenbare totale Funktion s mit
$\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n,i\rangle$ für alle $m,n,i\in\mathbb{N}$ (Axiom 4)

- **Konstruiere eine Turingmaschine M für s:**
  - Auf dem Eingabeband stehe die Codierung einer Zahl $\langle m,n\rangle$
  - Konstruiere auf Hilfsband 1 die Codierung der m-ten Turingmaschine M_m
  - Konstruiere auf Hilfsband 2 die Codierung einer Maschine $M_{\langle\rangle}$, welche bei Eingabe einer Zahl i den Wert $f_{M_{\langle\rangle}}(i) = \langle n,i\rangle$ berechnet.
  - Konstruiere auf Hilfsband 3 den Code einer Maschine, welche bei Eingabe einer Zahl i zunächst $M_{\langle\rangle}$ simuliert und M_m auf das Ergebnis anwendet.
  - Berechne die Gödelnummer der so aus $\langle m,n\rangle$ konstruierten Maschine
- **Setze $s := f_M$**
  - s ist per Konstruktion berechenbar
  - s ist total, weil M für jede Eingabe $\langle m,n\rangle$ ein Ergebnis produziert
  - Es gilt $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = f_{M_m}(f_{M_{\langle\rangle}}(i)) = \varphi_m\langle n,i\rangle$

Konsequenzen von UTM und SMN Theorem

- **Für jede berechenbare Funktion f gibt es ein $h\in\mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h(n)}(i) = f\langle n, i\rangle$ für alle $n, i\in\mathbb{N}$**

  Beweis: wenn $f = \varphi_m$ ist, so wähle $h(i) := s\langle m, n\rangle$

- **Berechenbare Funktionen sind effektiv kombinierbar**

  Es gibt eine berechenbare totale Funktion h mit $\varphi_{h\langle i,j\rangle} = \varphi_i\circ\varphi_j$

  Intuitiv: h berechnet die Gödelnummer der Kombination von M_i und M_j

  Beweis: die Funktion f mit $f\langle\langle i, j\rangle, x\rangle := \varphi_i(\varphi_j(x))$ ist berechenbar

  Also gibt es ein $h\in\mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h\langle i,j\rangle}(x) = f\langle\langle i, j\rangle, x\rangle = (\varphi_i\circ\varphi_j)(x)$

- **Es gibt berechenbare totale Funktionen f, g mit**
  - $\varphi_{f(i)}(n) = \varphi_i(n)+1$ für alle i, n
  - $\varphi_{g\langle i,j\rangle}(n) = \varphi_i(n)+\varphi_j(n)$ für alle i, j, n

  $\vdots$

Rekursions- und Selbstreproduktionstheorem
technische Aussagen mit vielfachen Anwendungen

- **Zu jeder berechenbaren totalen Funktion f gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_{f(n)}(x) = \varphi_n(x)$ für alle x**

  Die Funktion g mit $g\langle i,x\rangle := \varphi_{u\langle i,i\rangle}(x) = u\langle u\langle i,i\rangle,\ x\rangle$ ist berechenbar.

  Also gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $g\langle i,x\rangle = \varphi_{h(i)}(x)$

  Ebenso gibt es ein $h' \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h'(i)}(x) = g'\langle i,x\rangle := u\langle i, h(x)\rangle = \varphi_i(h(x))$.

  Wähle $n = h(h'(j))$, wobei j die Gödelnummer von f ist.

  Dann gilt $\varphi_{f(n)}(x) = \varphi_{f(h(h'(j)))}(x) = \varphi_{\varphi_j(h(h'(j)))}(x) = \varphi_{\varphi_{h'(j)}(h'(j))}(x)$
  $= \varphi_{u\langle h'(j),h'(j)\rangle}(x) = g\langle h'(j),x\rangle = \varphi_{h(h'(j))}(x) = \varphi_n(x)$

  Anmerkung: $h \circ h'$ ist eine Art universeller Fixpunktkombinator für berechenbare Funktionen

- **Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n(x) = n$ für alle x**

  Es gibt ein $f \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{f(i)}(x) = g\langle i,x\rangle := i$ für alle i,x.

  Für f gibt es nach dem Rekursionssatz ein n mit $\varphi_n(x) = \varphi_{f(n)}(x) = n$.

Berechenbarkeitskonzepte – abstrakt definiert

- **$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist berechenbar** (auch **(partiell) rekursiv**)
  - Es gibt ein $i\in\mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ (Es gibt ein Programm zur Berechnung von f)
  - f ist **total rekursiv**, wenn f berechenbar und total ist
- **$M\subseteq\mathbb{N}$ ist entscheidbar** (auch **rekursiv**)
  - Die (totale) charakteristische Funktion χ_M ist berechenbar
- **$M\subseteq\mathbb{N}$ ist semi-entscheidbar**
  - Die partielle charakteristische Funktion ψ_M ist berechenbar
- **$M\subseteq\mathbb{N}$ ist (rekursiv) aufzählbar**
  - $M=\emptyset$ oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion f

    mit $M = \text{range}(f) = \{n\in\mathbb{N} \mid \exists i\in\mathbb{N}\ f(i)=n\}$

Konzepte für andere Grundmengen analog

Anmerkungen zur Aufzählbarkeit

- **Nicht identisch mit Abzählbarkeit**
  - M abzählbar, wenn es eine surjektive Funktion f von $\mathbb{N}$ nach M gibt
  - $M \subseteq \mathbb{N}$ aufzählbar, wenn M Bild einer berechenbaren Funktion ist
- **Aufzählungen müssen nicht injektiv sein**
  - Die Funktion g mit $g(n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

    zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf
- **Jede Menge hat verschiedene Aufzählungen**
  - $h = \lambda n.2n+1$ zählt alle ungeraden Zahlen genau einmal auf
- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**
  - $M = \{x_0, .., x_n\}$ ist Bild von f mit $f(n) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - f ist primitiv rekursiv, also berechenbar
- **Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen**

Charakterisierungen von Aufzählbarkeit

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. **M ist aufzählbar**
2. **$M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$**
   - **range(f)**$= \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, f nicht notwendigerweise total
3. **M ist semi-entscheidbar**
4. **$M = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$**
   - **domain(f)**$= \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$

Aussage gilt analog für $M \subseteq \Sigma^*$, $M \subseteq \mathbb{N}^k$, ...

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M{=}\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ✓
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f ✓
- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M semi-entscheidbar**
  - Es sei $M{=}\text{range}(f)$ für ein berechenbares, möglicherweise partielles f
  - Dann ist $m \in M$ genau dann, wenn $m{=}f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$
  - Für $i \in \mathbb{N}$ mit $f{=}\varphi_i$ ist $\psi_M(m) = sign(min\{\langle n,t\rangle | \Phi_i(n){=}t \wedge \varphi_i(n){=}m\})$

    Standardtrick: simultanes Durchzählen von Eingabewerten und Rechenzeitschranken
  - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist ψ_M berechenbar ✓
- **M semi-entscheidbar $\Rightarrow$ M=domain(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M semi-entscheidbar.
  - Dann ist ψ_M berechenbar und $M{=}\{i \in \mathbb{N} \,|\, \psi_M(i) = 1\} = \text{domain}(\psi_M)$ ✓

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  - Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \bot\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M = \emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar $\surd$
  - Andernfalls gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \bot$
  - Wir konstruieren eine berechenbare totale Funktion g mit M=range(g)

    Es sei $g\langle n, t\rangle = \begin{cases} n & \text{falls } \Phi_i(n) = t, \\ n_0 & \text{sonst} \end{cases}$

    Standardtrick: Zerlegen der Eingabe mit Umkehrfunktionen der Standardtupelfunktion
  - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist g total und berechenbar
  - M=range(g): Es gilt $n \in M = \text{domain}(\varphi_i)$

    $\Leftrightarrow$ es gibt es eine Rechenzeit t mit $\Phi_i(n) = t$

    $\Leftrightarrow$ $g\langle n, t\rangle = n$

    $\Leftrightarrow$ $n \in \text{range}(g)$ $\surd$

Wichtige entscheidbare und aufzählbare Mengen

- **Sei f:$\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ berechenbar**
  - **range(f) ist aufzählbar** Charakterisierung #2
  - **domain(f) ist aufzählbar** Charakterisierung #4
  - **graph(f) ist aufzählbar (entscheidbar, wenn f total ist)**
    Bei Eingabe $\langle i, j\rangle$ teste $f(i)=j$ (hält immer, wenn f total)
- $\{\langle i, n, t\rangle \mid \Phi_i(n)=t\}$ **ist entscheidbar** Axiom 2
- $\{\langle i, n, y\rangle \mid \varphi_i(n)=y\}$ **ist aufzählbar**
  - Graph der universellen Funktion
- $H = \{\langle i, n\rangle \mid n \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ **ist aufzählbar**
  - H ist Definitionsbereich der universellen Funktion (Halteproblem)
- $S = \{i \mid i \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ **ist aufzählbar**
  - S ist Definitionsbereich von $\lambda i.u\langle i, i\rangle$ (Selbstanwendbarkeitsproblem)

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$M \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar $\surd$

$\Leftarrow$ Seien M und $\overline{M}$ aufzählbar

Falls $M{=}\emptyset$ oder $\overline{M}{=}\emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar $\surd$

Andernfalls $M{=}\mathrm{range}(f)$ und $\overline{M}{=}\mathrm{range}(g)$ wobei f, g total berechenbar

Definiere $h{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \min\{i \mid f(i){=}n \vee g(i){=}n\}$

Dann ist h berechenbar und total, da $n \in M$ oder $n \in \overline{M}$ für jedes n gilt.

Damit ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(h(n)) = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar $\surd$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt in §5.5)
- **Jede endliche Menge ist entscheidbar (und aufzählbar)**
  - Für $M = \{x_1, .., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n \text{ ,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar ✓
- **$M{\subseteq}\mathbb{N}$ ist aufzählbar g.d.w. es ein entscheidbares $M'{\subseteq}\mathbb{N}$ gibt mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in M'\}$** (Projektionssatz)

  $\Rightarrow$: Falls $M{=}\emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in \emptyset\}$ ✓
  - Andernfalls ist $M{=}\text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f und $\text{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in \text{graph}(f)\}$ ✓

  $\Leftarrow$: Es sei $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in M'\}$ für ein entscheidbares M'
  - Dann ist $\psi_M(y) = \text{sign}\,(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \langle n, y\rangle \in M'\}{+}1)$
    $= \text{sign}\,(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \chi_{M'}\langle n, y\rangle{=}1\}{+}1)$ berechenbar ✓

Abschlusseigenschaften aufzählbarer Mengen

Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$: Vereinigung**
  – Seien M=range(h) und M'=range(h') aufzählbar
  – Definiere g durch $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
  – Dann ist g berechenbar und range(g) $= M \cup M'$ aufzählbar
- **$M \cap M'$: Durchschnitt**
  – Es ist $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$. also ist $\psi_{M \cap M'}$ berechenbar
  In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn n $\in M \cap M'$
- **$f(M)$: Bild einer berechenbaren Funktion**
  – Definiere g durch $g(n) = f(h(n))$
  – Dann ist g berechenbar und range(g) $= f(M)$ aufzählbar
- **$f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren Funktion**
  – Es ist $\psi_{f^{-1}(M)}(n) = \psi_M(f(n))$. Also ist $\psi_{f^{-1}(M)}$ berechenbar.

Abschluß unter Komplement oder Differenz gilt nicht

Abschlusseigenschaften entscheidbarer Mengen

Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$: Vereinigung**
  - Beweisidee: $\chi_{M \bigcup M'}(n) = \text{sign}(\chi_M(n) + \chi_{M'}(n))$.
- **$M \cap M'$: Durchschnitt**
  - Beweisidee: $\chi_{M \bigcap M'}(n) = \chi_M(n) * \chi_{M'}(n)$.
- **$\overline{M}$: Komplement**
  - Beweisidee: $\chi_{\overline{M}}(n) = 1 - \chi_M(n)$.
- **M-M': Differenz**
  - Beweisidee: $M\text{-}M' = M \cap \overline{M'}$
- **$f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren totalen Funktion**
  - Beweisidee: $\chi_{f^{-1}(M)}(n) = \chi_M(f(n))$.

Abschluß unter Bild berechenbarer Funktionen gilt nicht

Rückblick elementare Berechenbarkeitstheorie

- **Es gibt 3 Grundkonzepte der Berechenbarkeit**
  - Berechenbare Funktionen, entscheidbare und aufzählbare Mengen
  - Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen

  Alle Konzepte sind beschreibbar durch berechenbare Funktionen auf $\mathbb{N}$

  - Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, f, f^{-1}
  - Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, $\overline{}$, -, f^{-1}

- **Alle Berechenbarkeit basiert auf nur 4 Axiomen**
  1. Numerierbarkeit von berechenbaren Funktionen und ihren Rechenzeiten

     Es gibt Funktionen φ, Φ:$\mathbb{N}\to\mathcal{R}$, so daß φ_i und Φ_i gleiche Definitionsbereiche haben
  2. Rechenzeit $\Phi_i(n)=t$ ist entscheidbar
  3. Die universelle Funktion $u\langle i,n\rangle := \varphi_i(n)$ ist berechenbar
  4. Berechenbare Funktionen sind effektiv kombinierbar (SMN Theorem)

  Jedes Berechenbarkeitsmodell erfüllt diese Axiome

Mehr Details in Vossen & Witt §9 und den dort angegebenen Referenzen