Theoretische Informatik II

Einheit 6.3

$\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

1. Logische Probleme
2. Graphbasierte Probleme
3. Scheduling Probleme

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Direkter Beweis ist zu aufwendig

– Würde explizite Codierung beliebiger NTMs erfordern

– Verwende $L \in \mathcal{NPC} \;\Leftrightarrow\; L \in \mathcal{NP} \wedge \exists L' \in \mathcal{NPC}.\; L' \leq_p L$

1. Zeige $L \in \mathcal{NP}$:

a) Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag die OTM generiert

b) Beschreibe, wie Lösungsvorschlag deterministisch überprüft wird

c) Zeige, daß das Prüfverfahren polynomiell ist

2. Zeige $\exists L' \in \mathcal{NPC}.\; L' \leq_p L$:

d) Wähle ein ähnliches, bekannt $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem L'

e) Beschreibe Transformationsfunktion f, welche Eingaben über dem Alphabet Σ' für L' in Wörter über dem Alphabet für L umwandelt

f) Zeige für alle $x \in \Sigma'^*$: $x \in L' \;\Leftrightarrow\; f(x) \in L$ (also $L' = f^{-1}(L)$)

g) Zeige, daß f in polynomieller Zeit berechnet werden kann

Erfüllbarkeit mit 3 Literalen pro Klausel

$$\boldsymbol{3SAT = \{k_1, ..k_m \mid k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3} \ \text{ mit } \ z_{ij} \in \{x_1, \overline{x_1}, ..x_n, \overline{x_n}\} \wedge \exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n \text{ erfüllt } k_j\}}$$

1. Zeige $3SAT \in \mathcal{NP}$:

– Wie $SAT \in \mathcal{NP}$: Rate Belegung der Variablen und werte Klauseln aus

2. Zeige $SAT \leq_p 3SAT$:

Satz 10.15

e) Normalisierung der Klauseln $k_1, ..k_m$ über $x_1, ..x_n$.

Ersetze Klausel k_i durche äquivalente Menge von Dreierklauseln

- Ersetze einelementige Klauseln $k_i = z$ durch $z \vee z \vee z$
- Ersetze zweielementige Klauseln $k_i = z \vee z'$ durch $z \vee z \vee z'$
- Übernehme dreielementige Klauseln unverändert
- Ersetze Klauseln $k_i = z_1 \vee z_2 \vee .. \vee z_j$ durch j-2 neue Klauseln mit neuen Variablen $y_{i,l}$: $(z_1 \vee z_2 \vee y_{i,1}) \wedge (\overline{y_{i,1}} \vee z_3 \vee y_{i,2}) \wedge .. \wedge (\overline{y_{i,j-3}} \vee z_{j-1} \vee z_j)$

f) k_i erfüllbar genau dann wenn normalisierte Klauselmenge erfüllbar

Für die Transformation f gilt: $\forall F.\ F \in SAT \Leftrightarrow f(F) \in 3SAT$

g) Normalisierung der Klauseln möglich in **polynomieller Zeit**

Das Cliquen Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{CLIQUE = \{\, (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists V_c{\subseteq}V.\ |V_c|{\geq}k \ \wedge\ V_c \text{ Clique in } G \,\}}$$

1. Zeige $CLIQUE \in \mathcal{NP}$:

a) Rate eine Knotenmenge $V_c \subseteq V$

b/c) Prüfe $|V_c| \geq k$ — *maximal* $|V_c|$ *Schritte*

Prüfe: $\forall v \neq v' \in V_c.\ \{v, v'\} \in E$ — *maximal* $|V_c|^2 * |E| \leq |V|^4$ *Schritte*

2. Zeige $3SAT \leq_p CLIQUE$:

– Gegeben $F = (k_1, \ldots, k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, \ldots, \overline{x_n}\}$

– Konstruiere Graphen $G_F := (V, E)$ mit

$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{\ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}}\}$

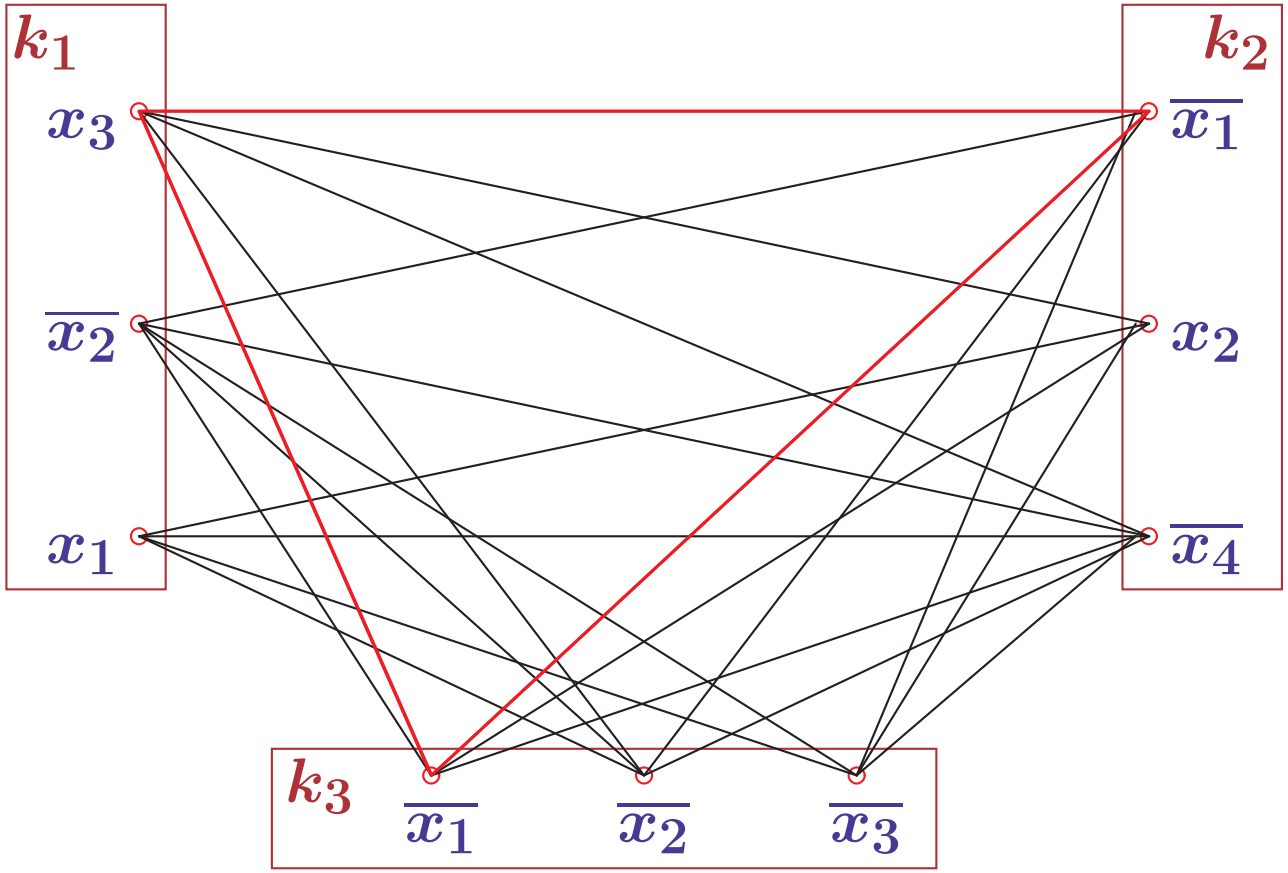
e) Setze $f(F) := (G_F, m)$

f) Dann gilt $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in CLIQUE$ (Beweis folgt)

g) f ist in polynomieller Zeit berechenbar

Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F=(k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1=x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ $k_2=\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$ $k_3=\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$



Gibt es in dem Graphen eine 3-Clique?

Korrektheit der Transformation $3SAT \mapsto CLIQUE$

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \overline{x_n}\}$

Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei

$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{\ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$

– Dann hat G_F eine m-Clique V_c, d.h. $\{v_{ij}, v_{i'j'}\} \in E$ für alle $v_{ij} \neq v_{i'j'} \in V_c$

– Per Konstruktion von E enthält V_c für jedes i genau einen Knoten v_{ij} und für je zwei Knoten $v_{ij}, v_{i'j'} \in V_c$ gilt $z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}}$

– Belegen aller zu $v_{ij} \in V_c$ gehörigen z_{ij} mit 1 ist widerspruchsfrei möglich und erfüllt alle Klauseln k_i

Also gilt $F \in 3SAT$

Ist umgekehrt $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der z_{ij}

– Wähle aus jeder Klausel k_i ein Literal mit dem Wert 1

– Dann bilden die zugehörigen Knoten eine m-Clique in G_F

Also gilt $f(F) \in CLIQUE$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{3SAT \leq_p CLIQUE}$$

Das Vertex Cover Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{VC} = \{(G,k) \mid G \text{ Graph } \wedge\ \exists V' \subseteq V.\ |V'| \leq k \wedge V' \text{ Knotenüberdeckung von } G\}$$

1. Zeige $\boldsymbol{VC} \in \boldsymbol{\mathcal{NP}}$:

a) Rate eine Knotenmenge $V' \subseteq V$

b) Prüfe $|V'| \leq k$ *maximal* $|V'|$ *Schritte*

Prüfe: $\forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$ *maximal* $|V'| * |E| \leq |V|^3$ *Schritte*

c) Gesamte Anzahl der Schritte ist in $\mathcal{O}(|V|^3)$

2. Zeige $\boldsymbol{CLIQUE \leq_p VC}$: (vgl. Einheit 6.2)

e) Es ist V_c eine Clique in $G = (V, E)$

$\Leftrightarrow\ \forall v, v' \in V_c.\ v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E$ (Definition)

$\Leftrightarrow\ \forall \{v, v'\} \notin E.\ v \neq v' \Rightarrow v \notin V_c\ \vee\ v' \notin V_c$ (Kontraposition)

$\Leftrightarrow\ \forall \{v, v'\} \in E^c.\ v \in V - V_c\ \vee\ v' \in V - V_c$ (Positive Formulierung)

$\Leftrightarrow\ V - V_c$ Knotenüberdeckung des Komplementgraphen $G^c = (V, E^c)$

Setze $f(G,k) := (G^c, |V| - k)$

f) Es folgt $(G,k) \in CLIQUE \Leftrightarrow f(G,k) \in VC$

g) f ist in polynomieller Zeit $\mathcal{O}(|V|^2)$ berechenbar

Gerichteter Hamiltonscher Kreis (DHC)

Ausgangspunkt für Beweis der $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TSP

$$\boldsymbol{DHC = \{\, G \mid G{=}(V,E) \text{ gerichteter Graph} \wedge \exists c{=}(v_{i_1}, ..v_{i_{|V|}}).\ c \text{ Hamiltonscher Kreis in } G\}}$$

Directed Hamiltonian Circuit: Gibt es in einem gerichteten Graphen einen Hamiltonschen Kreis?

- Kreis, der jeden Knoten von G genau einmal berührt
- Beschrieben als Liste disjunkter Knoten $(v_{i_1}, .., v_{i_{|V|}})$ mit $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \in E$ und $(v_{i_{|V|}}, v_{i_1}) \in E$

1. Zeige $\boldsymbol{DHC \in \mathcal{NP}}$:

a) Rate Zyklus $(v_{i_1}, .., v_{i_n})$

b) Prüfe ob alle $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$ und (v_{i_n}, v_{i_1}) Kanten aus E sind

c) Anzahl der Schritte ist maximal $n * |E| \in \mathcal{O}(n^3)$

DHC ist $\mathcal{NP}$-vollständig: $3SAT \leq_p DHC$

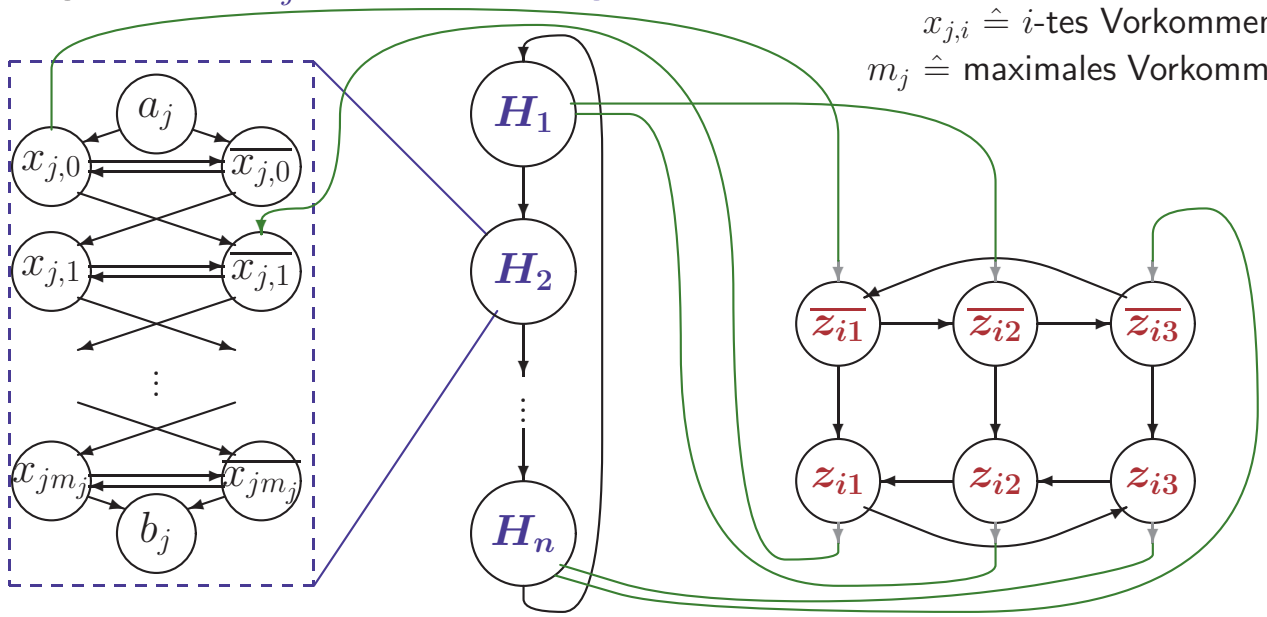
Gegeben $F = (k_1, .., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, .., \overline{x_n}\}$

e) **Konstruiere Graphen $G_F \equiv f(F)$ aus drei Komponenten**

- Teilgraphen H_j für Codierung der Variablenvorkommen von $x_j/\bar{x}_j$

$x_{j,i} \hat{=}$ i-tes Vorkommen von x_j in F

$m_j \hat{=}$ maximales Vorkommen von $x_j/\bar{x}_j$



- Teilgraph für Codierung der Klauseln
- Verbindungskanten zwischen Variablen und Klauselliteralen

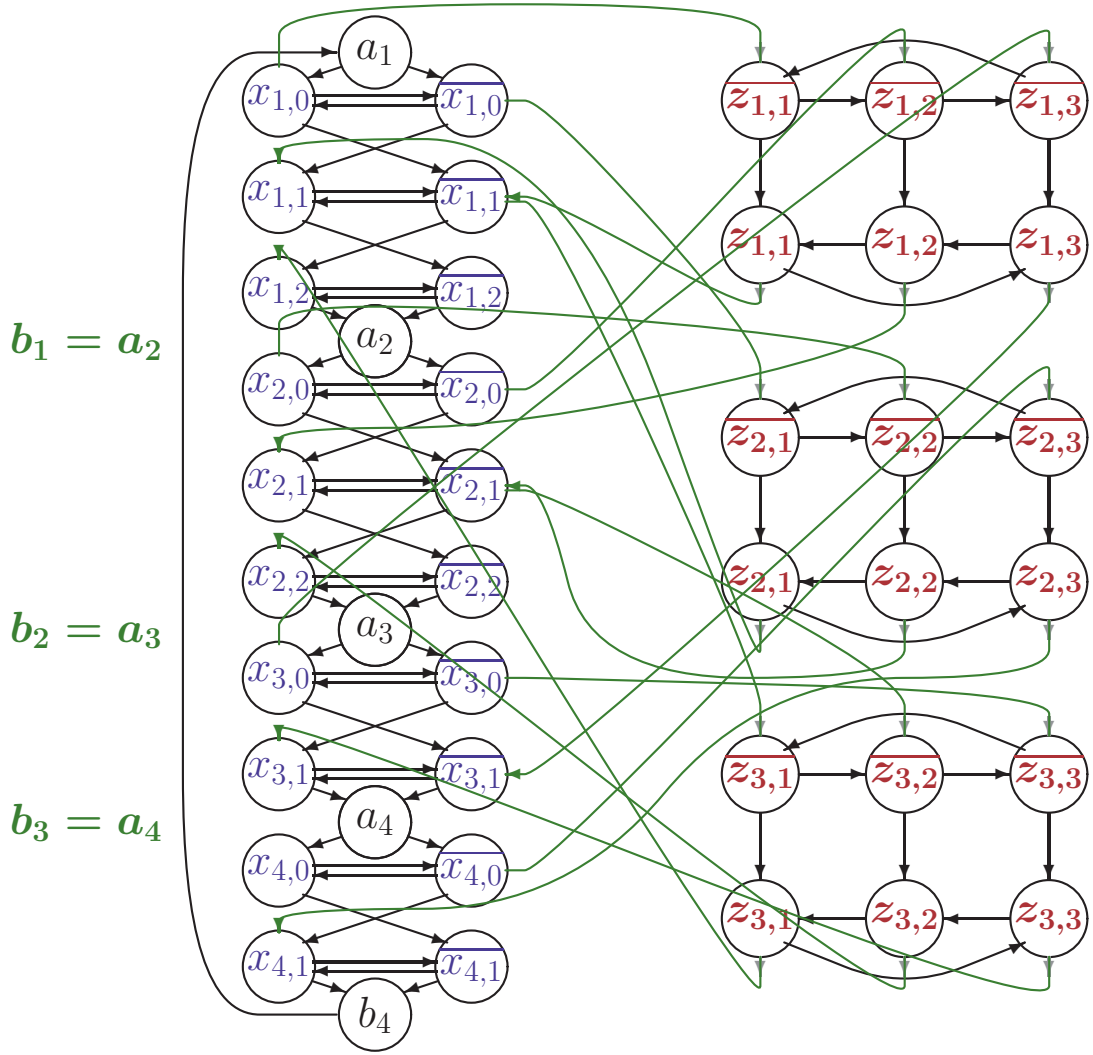
  Für $z_{ik}=x_j$ verbinde erstes ungenutzte Vorkommen $x_{j,p}$ mit $\overline{z_{ik}}$ und $z_{i,k}$ mit $\overline{x_{j,p+1}}$

  Für $z_{ik}=\overline{x_j}$ verbinde erstes ungenutzte Vorkommen $\overline{x_{j,p}}$ mit $\overline{z_{ik}}$ und z_{ik} mit $x_{j,p+1}$

g) **f ist in polynomieller Zeit berechenbar**

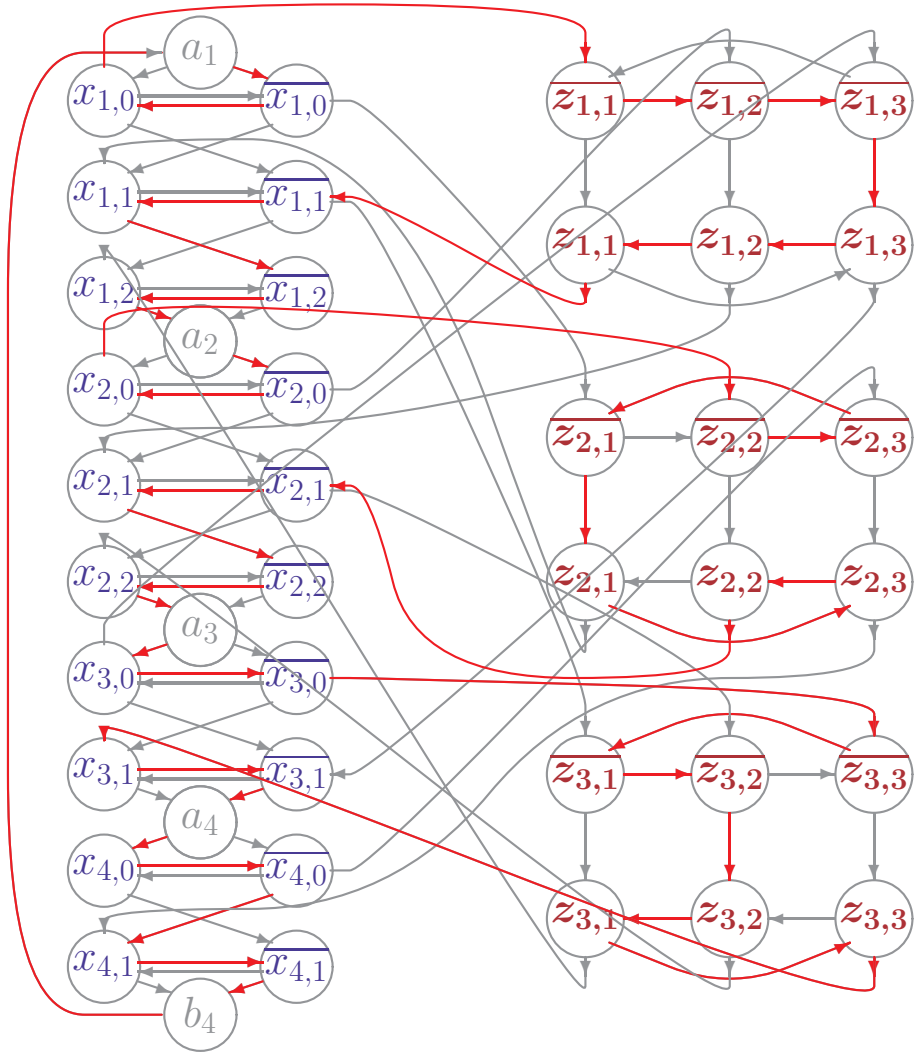
Codierung einer Formel als DHC Problem

$F=(k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1=x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ $k_2=\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$ $k_3=\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$



Erfüllende Belegung als DHC

$F=(k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1=x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ $k_2=\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$ $k_3=\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$



Erfüllende Belegung: $(1, 1, 0, 0)$

Beginne mit Teilpfad $a_1 \to \overline{x_{1,0}} \to x_{1,0}$

Verbinde $x_{1,0}$ mit Klausel 1

Laufe von $\overline{x_{1,1}}$ durch H_1 bis a_2

Weiter mit Teilpfad $a_2 \to \overline{x_{2,0}} \to x_{2,0}$

Verbinde $x_{2,0}$ mit Klausel 2

Laufe von $\overline{x_{2,1}}$ durch H_2 bis a_3

Weiter mit Teilpfad $a_3 \to x_{3,0} \to \overline{x_{3,0}}$

Verbinde $\overline{x_{3,0}}$ mit Klausel 3

Laufe von $x_{3,1}$ durch H_3 bis a_4

Beliebig weiter durch H_3 bis b_4 und a_1

Korrektheit (Skizze): $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

- **Es gelte $F \in 3SAT$**

  Sei $c_1, ..c_n$ eine erfüllende Belegung von F.

  Konstruiere einen Hamiltonschen Kreis wie folgt

  – In H_j beginne mit a_j und $\overline{x_{j,0}}$ falls $c_j = 1$, sonst mit a_j und $x_{j,0}$

  – Verbinde $\overline{x_{j,p}}$ mit $x_{j,p}$ und dann mit $\overline{x_{j,p+1}}$.

  Wenn möglich, gehe dabei über die Knoten einer verbundenen Klausel z_i

  – Analog verbinde $x_{j,p}$ mit $\overline{x_{j,p}}$ und dann mit $x_{j,p+1}$, evtl. mit Umweg

  – Verlasse H_j in b_j und verbinde mit H_{j+1}

  Da $c_1, ..c_n$ die Formel F erfüllt, **wird jedes H_j und z_i durchlaufen**.

- **Es gelte $G_F \in DHC$**

  Verbindet der Kreis a_j mit $x_{j,0}$ wähle $c_j = 0$, sonst $c_j = 1$

  – Betritt der Kreis Klausel z_i bei $\overline{z_{i,k}}$, so muß er sie bei $z_{i,k}$ verlassen

  – Damit verbindet der Kreis immer ein $\overline{x_{j,p}}$ mit $x_{j,p}$ mit $\overline{x_{j,p+1}}$ $(c_j = 1)$ oder $x_{j,p}$ mit $\overline{x_{j,p}}$ mit $x_{j,p+1}$ $(c_j = 0)$, bis er H_j verläßt.

  – Bei Umweg über z_i muß das verbundene Literal $z_{ik} \in \{x_j, \overline{x_j}\}$ erfüllt sein

  – Da alle Klauseln durchlaufen werden, **sind alle Klauseln erfüllt**.

Hamiltonscher Kreis (Hamiltonian Circuit)

$$HC = \{\, G \mid G \text{ Graph} \wedge G \text{ hat Hamiltonschen Kreis} \}$$

Hamiltonian Circuit: Gibt es in einem ungerichteten Graphen einen Hamiltonschen Kreis?

– Liste disjunkter Knoten $(v_{i_1}, .., v_{i_{|V|}})$ mit $\{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}\} \in E$ und $\{v_{i_{|V|}}, v_{i_1}\} \in E$

1. Zeige $HC \in \mathcal{NP}$: (Beweis wie bei DHC)

2. Zeige $DHC \leq_p HC$

– Gegeben gerichteter Graph $G_d = (V_d, E_d)$

e) Konstruiere ungerichteten Graphen $f(G_d) \equiv G = (V, E)$

mit $v^{ein}, v, v^{aus} \in V$ für $v \in V_d$

und $\{v^{ein}, v\}, \{v, v^{aus}\} \in E$ für $v \in V_d$ und $\{v_i^{aus}, v_j^{ein}\} \in E$ für $(v_i, v_j) \in E_d$

f) Dann gilt $G_d \in DHC \Leftrightarrow f(G_d) \in HC$ (Beweis folgt)

g) f ist in polynomieller Zeit berechenbar

Korrektheit: $G_d \in DHC \Leftrightarrow f(G_d) \in HC$

$v^{ein}, v, v^{aus} \in V$ für $v \in V_d$, $\{v^{ein}, v\}, \{v, v^{aus}\} \in E$ für $v \in V_d$ und $\{v_i^{aus}, v_j^{ein}\} \in E$ für $(v_i, v_j) \in E_d$

Ist $G_d \in DHC$, so gibt es einen DHC $(v_{i_1}, .., v_{i_n})$ in G_d

– In diesem Fall ist $(v_{i_1}^{ein}, v_{i_1}, v_{i_1}^{aus}, .., v_{i_n}^{aus})$ ein Hamiltonscher Kreis in G

Also $f(G_d) \in HC$

Gilt $f(G_d) \in HC$, dann gibt es einen Hamiltonkreis $(u_{j_1}, .., u_{j_{3n}})$ in G

– Da jeder Knoten v_i nur v_i^{ein} und v_i^{aus} als Nachbarn hat und sonst nur Kanten zwischen v_i^{aus} und einem v_j^{ein} verlaufen muß der Kreis die Gestalt $(v_{i_1}^{ein}, v_{i_1}, v_{i_1}^{aus}, .., v_{i_n}^{ein}, v_{i_n}, v_{i_n}^{aus})$ oder $(v_{i_1}^{aus}, v_{i_1}, v_{i_1}^{ein}, .., v_{i_n}^{aus}, v_{i_n}, v_{i_n}^{ein})$ haben

– Da G ungerichtet ist, sind beide Kreise identisch, und wir können einen gerichteten Hamiltonschen Kreis $(v_{i_1}, .., v_{i_n})$ für G_d extrahieren

Also gilt $G_d \in DHC$

Das Travelling Salesman Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

Gegeben n Städte, Reisekostentabelle $c_{i,j}$, Kostenlimit B

Gibt es eine Rundreise durch alle Städte mit Gesamtkosten B?

$$TSP = \{ (c_{1,2}, ..c_{n-1,n}), B \mid \exists \pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv} \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i),\pi(i+1)} + c_{\pi(n),\pi(1)} \leq B \}$$

1. Zeige $TSP \in \mathcal{NP}$:

a) Rate eine Rundreise $\pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}$ *darstellbar als Liste* $(\pi(1)..\pi(n))$

b/c) Prüfe $\sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B$ *maximal n Schritte*

2. Zeige $HC \leq_p TSP$:

e) Es ist $(v_{i_1}, .., v_{i_n})$ ein Hamiltonscher Kreis in $G = (V, E)$ mit $n = |V|$

$\Leftrightarrow$ $(i_1, .., i_n)$ Rundreise durch n Städte mit Kosten n,
wobei $c_{ij} = 1$ genau dann, wenn $\{v_i, v_j\} \in E$ (sonst größer)

$\Leftrightarrow$ $(i_1, .., i_n)$ Lösung des entsprechenden TSP $((c_{1,2}, ..c_{n-1,n}), n)$

Setze $f(G) := ((c_{1,2}, ..c_{n-1,n}), |V|)$ mit $c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$

f) Es folgt $G \in HC \Leftrightarrow f(G) \in TSP$

g) f ist in polynomieller Zeit $\mathcal{O}(|V|^2)$ berechenbar

Das Färbbarkeitsproblem (Graph Coloring)

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |n|$

Gibt es eine Färbung von V mit k verschiedenen Farben,

so daß verbundene Knoten verschiedene Farben haben?

$$GC = \{ (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge \exists f_V{:}V \rightarrow \{1..k\}.\, \forall \{u,v\} \in E.\, f_V(u) \neq f_V(v) \}$$

1. Zeige $GC \in \mathcal{NP}$:

a) Rate Färbung $f_V{:}V \rightarrow \{1..k\}$ des Graphen

b) Prüfe $\forall \{u,v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v)$

c) Anzahl der Schritte ist maximal $|E| \in \mathcal{O}(|V|^2)$

Das Färbbarkeitsproblems ist $\mathcal{NP}$-vollständig

2. Zeige $3SAT \leq_p GC$:

– Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \overline{x_n}\}$

e) Konstruiere Färbungsproblem $f(F) \equiv (G, 3)$ wie folgt

· Teilgraph für Codierung der Variablenbelegung

Wähle $V_{var} = \{u,\ x_1, ..., \overline{x_n}\}$

und $E_{var} = \{\{u, x_1\}, \{u, \overline{x_1}\}, \{x_1, \overline{x_1}\}, ..\{u, x_n\}, \{u, \overline{x_n}\}, \{x_n, \overline{x_n}\}\}$

Bei 3-Färbbarkeit erhalten x_i und $\overline{x_i}$ verschiedene Farben aus 0 oder 1

· Teilgraph für Codierung der Klauseln

Wähle $V_k = \{v,\ a_1, b_1, c_1, y_1, z_1, .., a_m, b_m, c_m, y_m, z_m\}$

und $E_k = \{\{v, y_1\}, \{v, z_1\}, \{a_1, y_1\}, \{a_1, z_1\}, \{b_1, y_1\}, \{c_1, z_1\}, \{b_1, c_1\},$
$...\{v, y_m\}, ..\{b_m, c_m\},\ \{u, v\}\}$

Knoten v erhält Farbe 0 oder 1

· Verbindungskanten zur Codierung der Klauselliterale

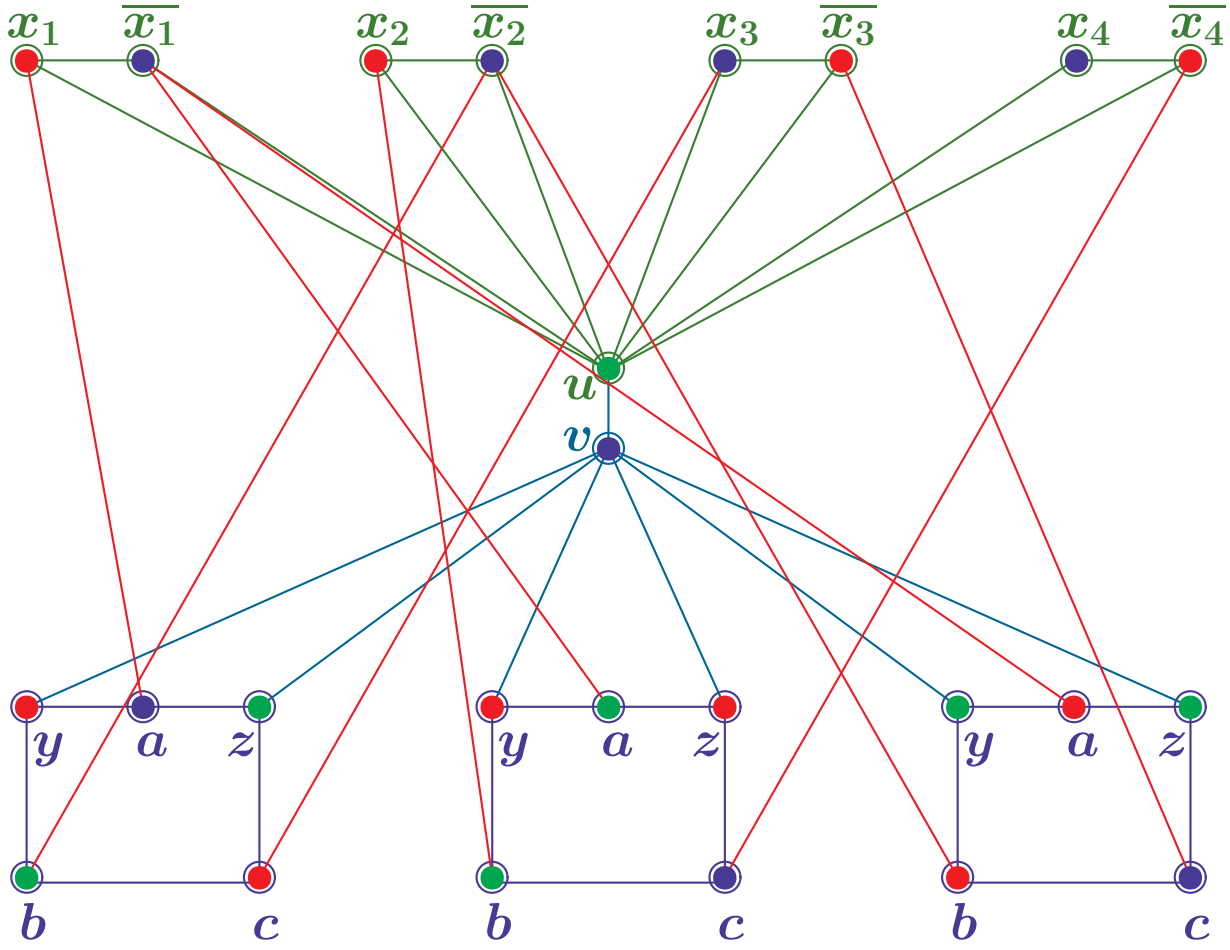
$E_{lit} = \{\{a_1, z_{11}\}, \{b_1, z_{12}\}, \{c_1, z_{13}\}, ..\{a_m, z_{m1}\}, \{b_m, z_{m2}\}, \{c_m, z_{m3}\}\}$

g) $G{:=}(V_{var} \cup V_k,\ E_{var} \cup E_k \cup E_{lit})$ ist in polynomieller Zeit berechenbar

f) Dann gilt $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in GC$ (Beweis folgt)

Codierung einer Formel als Färbungsproblem

$F=(k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1=x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ $k_2=\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$ $k_3=\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$



Gibt es für den Graphen eine 3-Färbung?

Korrektheit: $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in GC$

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j
  - Wähle $f_v(x_i), f_v(\overline{x_i}) \in \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ entsprechend, $f_v(u)=\mathbf{2}$ und $f_v(v)=\mathbf{0}$.
  - Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe $\mathbf{0}$ erhalten
  - Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt
  - Also gibt es eine 3-Färbung des Graphen und somit $f(F) \in GC$

- Ist $f(F) \in GC$ dann ist o.B.d.A. $f_v(u)=\mathbf{2}$ und $f_v(v)=\mathbf{0}$
  - Wähle Belegung der x_i entsprechend der Färbung von x_i
  - Wäre Klausel k_i nicht erfüllt, so wäre die Farbe der a_i, b_i, c_i $\mathbf{1}$ oder $\mathbf{2}$
  - Wegen $f_v(b_i) \neq f_v(c_i)$ und $f_v(v)=\mathbf{0}$ wäre dann $f_v(y_i) \neq f_v(z_i) \in \{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$
  - Dies widerspricht der Färbbarkeit, da a_i ebenfalls mit $\mathbf{1}$ oder $\mathbf{2}$ gefärbt ist.
  - Also $F \in 3SAT$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{3SAT} \leq_p \mathbf{GC}$$

Das Rucksackproblem (Knapsack)

Gegeben n Objekte mit Gewichten g_i und Nutzenwerten a_i
Rucksack mit Gewichtslimit G, Minimalnutzwert A

Gibt es eine Bepackung des Rucksacks mit Mindestnutzwert A und Maximalgewicht G?

$$KP = \{(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}.\ \sum_{i\in J} g_i \leq G \wedge \sum_{i\in J} a_i \geq A\}$$

1. Zeige $KP \in \mathcal{NP}$:

a) Rate Menge von Gegenständen $J \subseteq \{1..n\}$

b) Prüfe $\sum_{i\in J} g_i \leq G$ und $\sum_{i\in J} a_i \geq A$

c) Anzahl der Schritte ist maximal $2|J| \in \mathcal{O}(n)$

Das Rucksackproblem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

2. Zeige $3SAT \leq_p KP$:

– Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \overline{x_n}\}$

– Codiere Anzahl der Vorkommen von Literalen in den Klauseln in Dezimalstellen der Gewichte und Nutzenwerte

e) Konstruiere Rucksackproblem $f(F) \equiv (g_1, ..g_{2m+2n}, a_1, ..a_{2m+2n}, G, A)$ wobei alle a_j und g_j $m+n$-stellige Zahlen sind mit $g_j = a_j$ und

· a_j: Anzahl der x_j in k_i an Stelle $i \leq m$, 1 an Stelle $m+j$, sonst 0 $(j \leq n)$

· $a_{n+j} \equiv b_j$: Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i an Stelle $i \leq m$, 1 an Stelle $m+j$, sonst 0 $(j \leq n)$

· $a_{2n+i} \equiv c_i$: 1 an Stelle i, sonst 0 $(i \leq m)$

· $a_{2n+m+i} \equiv d_i$: 2 an Stelle i, sonst 0 $(i \leq m)$

Setze $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal}\underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

f) Dann gilt $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in KP$ (Beweis folgt)

g) f ist in polynomieller Zeit berechenbar

Codierung einer Formel als Rucksackproblem

$F=(k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1=x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ $k_2=\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$ $k_3=\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

$A = 444\,1111$

$a_1 = 100\,1000$	$b_1 = 011\,1000$	$c_1 = 100\,0000$	$d_1 = 200\,0000$
$a_2 = 010\,0100$	$b_2 = 101\,0100$	$c_2 = 010\,0000$	$d_2 = 020\,0000$
$a_3 = 100\,0010$	$b_3 = 001\,0010$	$c_3 = 001\,0000$	$d_3 = 002\,0000$
$a_4 = 000\,0001$	$b_4 = 010\,0001$		

$(1, 1, 0, 0)$ ist erfüllende Belegung

$$a_1 + a_2 + b_3 + b_4 + c_1 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = A$$

Korrektheit: $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in KP$

- a_j: Anzahl der x_j in k_i an Stelle $i \leq m$, 1 an Stelle $m+j$, sonst 0 $(j \leq n)$
- b_j: Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i an Stelle $i \leq m$, 1 an Stelle $m+j$, sonst 0 $(j \leq n)$
- c_i: 1 an Stelle i, sonst 0 d_i: 2 an Stelle i, sonst 0 $(i \leq m)$
- $g_j = a_j$ für alle j $A \equiv G = \underbrace{4\ldots4}_{m-mal}\underbrace{1\ldots1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

– Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst
  Dann haben in der Summe alle Stellen $m+j$ den Wert 1
  und die Stellen $i \leq n$ einen Wert aus $\{1..3\}$, da jedes k_i erfüllt wird

– Ergänzung der Stellen $i \leq n$ mit c_i und d_i zu 4 liefert A und G

Also $f(F) \in KP$

Gilt $f(F) \in KP$, so gibt es eine Bepackung die genau den Wert A ergibt

– Diese enthält für Stelle $m+j$ entweder a_j (setze $x_j := 1$) oder b_j ($x_j := 0$)

– Wegen $c_i + d_i = 3$ muß die Summe der a_j und b_j in der Bepackung
  an jeder Stelle $i \leq m$ mindestens den Wert 1 haben

– Also kommt in Klausel k_i mindestens ein Literal mit dem Wert 1 vor

Damit erfüllt die gewählte Belegung die Formel F, d.h. $F \in 3SAT$

Anmerkungen zum Beweis $3SAT \leq_p KP$

- **Reduktion nutzt Spezialfall des Rucksackproblems**
  - Gewichte g_i und Nutzen a_i sind jeweils gleich
  - Gesamtnutzen G und Gesamtgewicht A sind gleich
  - Wegen $\sum_{i \in J} g_i \leq G \wedge \sum_{i \in J} a_i \geq A$ gilt also $\sum_{i \in J} a_i = A$

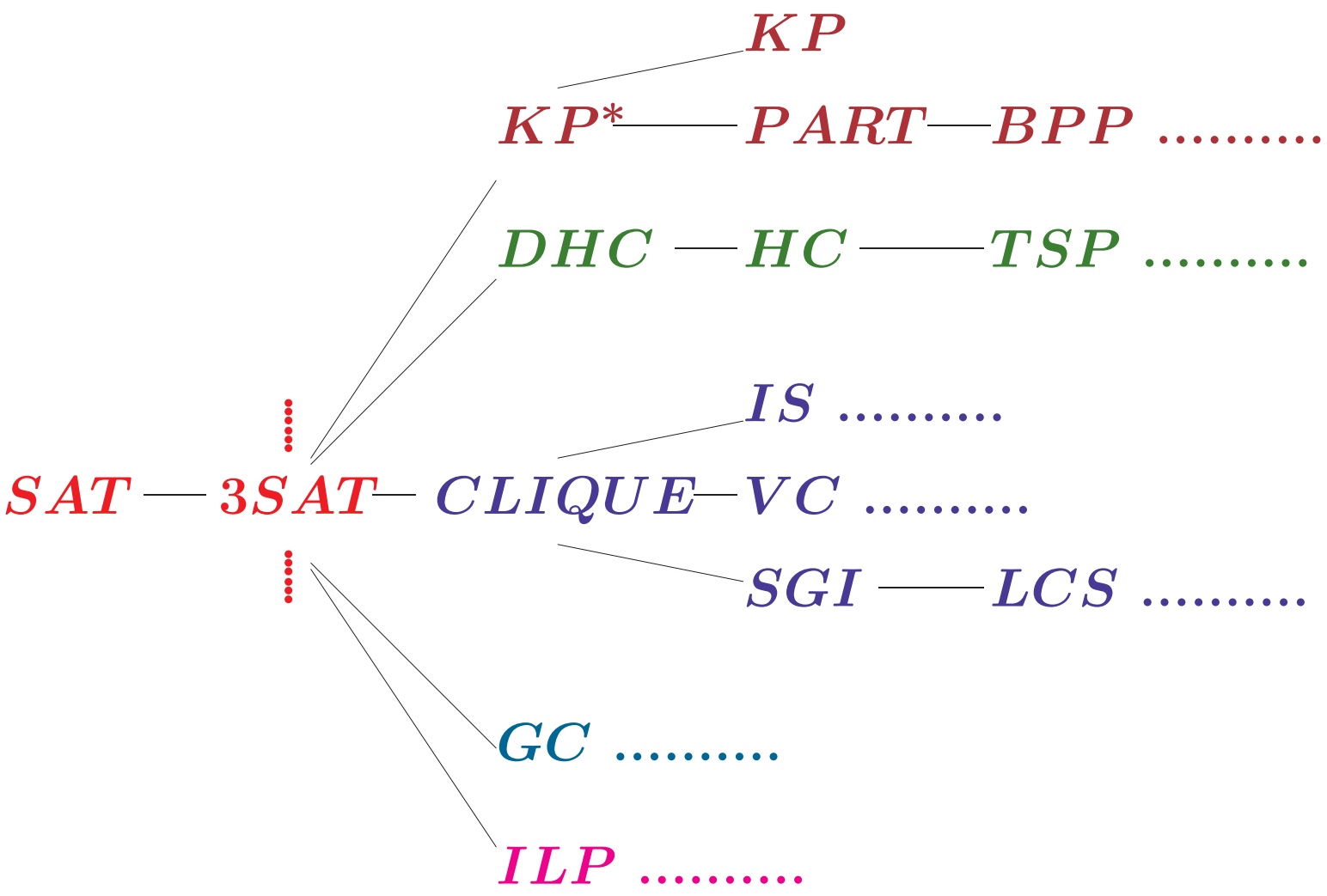
$$\boldsymbol{KP^* = \{(a_1..a_n,\ A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}.\ \sum_{i \in J} a_i = A\}}$$

  - KP^* ist Ausgangsproblem für viele Reduktionen

    Manche Lehrbücher bezeichnen dies als "das Rucksackproblem"

- **Beweis zeigt eigentlich $3SAT \leq_p KP^* \leq_p KP$**
  - Reduktion $3SAT \leq_p KP^*$ konstruiert die a_i und A wie gezeigt
  - Reduktion $KP^* \leq_p KP$ konstruiert $g_i = a_i$ und $G = A$
  - Damit sind beide Versionen des Rucksackproblems $\mathcal{NP}$-vollständig

$\mathcal{NP}$-vollständige Probleme – Reduktionsstruktur



ANHANG

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Independent Set** (HMU §10.4.2) $\boldsymbol{3SAT \leq_p IS}$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq |V|$.
  - Gibt es in G eine unabhängige Knotenmenge der Größe k?

  $\boldsymbol{IS} = \{ (G, k) \mid G = (V, E) \text{ Graph } \wedge \exists V_i \subseteq V.\ |V_i| \geq k \ \wedge \forall u, v \in V_i.\ \{u, v\} \notin E \}$

- **Subgraph Isomorphism** $\boldsymbol{CLIQUE \leq_p SGI}$
  - Gegeben zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$.
  - Gibt es einen Subgraphen H von G_1, der isomorph zu G_2 ist?

  $\boldsymbol{SGI} = \{ (G_1, G_2) \mid G_1, G_2 \text{ Graphen } \wedge \exists H \text{ Graph.}\ H \sqsubseteq G_1 \ \wedge \ H \cong G_2 \}$

- **Largest Common Subgraph** $\boldsymbol{SGI \leq_p LCS}$
  - Gegeben Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ und eine Zahl $k \leq |G_1|$
  - Gibt es isomorphe Subgraphen H_1 von G_1 und H_2 von G_2 der Größe k?

  $\boldsymbol{LCS} = \{ (G_1, G_2, k) \mid G_1, G_2 \text{ Graphen } \wedge \ k \leq |G_1| \ \wedge \exists H_1, H_2 \text{ Graphen.}$
  $H_1 \sqsubseteq G_1 \ \wedge \ H_2 \sqsubseteq G_2 \ \wedge \ H_1 \cong H_2 \ \wedge \ |H_1| \geq k \}$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Partitionsproblem** $\boldsymbol{KP \leq_p PART}$
  - Gegeben n Objekte mit Wert $b_1, ..., b_n$.
  - Gibt es eine Aufteilung der Objekte in zwei gleichwertige Stapel?

  $\boldsymbol{PART} = \{\, b_1, ..b_n \mid b_i \in \mathbb{N} \wedge \exists I \subseteq \{1..n\}.\ \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in \overline{I}} b_i \}$
- **Binpacking** $\boldsymbol{PART \leq_p BPP}$
  - Gegeben n Objekte der Größe $a_1, ...a_n$ und k Behälter der Größe b
  - Kann man alle Objekte in den Behältern unterbringen?

  $\boldsymbol{BPP} = \{(a_1, ..a_n, b, k) \mid \exists f{:}\{1..n\} \rightarrow \{1..k\}.\ \forall j \leq k.\ \sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b\}$
- **Multiprozessor-Scheduling** $\boldsymbol{MPS \mathrel{\hat{=}} BPP}$
  - Gegeben n Prozesse j_i mit Laufzeit $t(j_i)$, m Prozessoren, Deadline t_D.
  - Gibt es eine Verteilung der Prozesse auf die Prozessoren, so daß bei Startzeit t_0 alle Prozesse vor der Zeit t_D beendet sind?
- **Integer Linear Programming** $\boldsymbol{3SAT \leq_p ILP}$
  - Gegeben eine $k \times k$ Matrix A und einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{Z}^k$
  - Gibt es ein $\vec{x} \in \mathbb{Z}^k$, welches das lineare Ungleichungssystem $A * \vec{x} \geq \vec{b}$ löst?