

Theoretische Informatik II

Einheit 6.4

Hierarchie von Komplexitätsklassen



1. Komplementäre Klassen
2. Polynomieller Platz
3. Logarithmischer Platz
4. Hierarchiesätze

ES GIBT WEITERE WICHTIGE KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- $co-NP$
 - Probleme mit Komplement in NP
 - Problem muß nicht notwendigerweise selbst in NP liegen

ES GIBT WEITERE WICHTIGE KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- $co-\mathcal{NP}$
 - Probleme mit Komplement in \mathcal{NP}
 - Problem muß nicht notwendigerweise selbst in \mathcal{NP} liegen
- Σ_i^P / Π_i^P
 - Σ_2^P : Sprachen von OTMs, deren Orakel ein \mathcal{NP} -Problem entscheidet
 - Π_2^P : Sprachen von OTMs, deren Orakel ein $co-\mathcal{NP}$ -Problem entscheidet

ES GIBT WEITERE WICHTIGE KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- **$co-\mathcal{NP}$**
 - Probleme mit Komplement in \mathcal{NP}
 - Problem muß nicht notwendigerweise selbst in \mathcal{NP} liegen
- **Σ_i^P / Π_i^P**
 - Σ_2^P : Sprachen von OTMs, deren Orakel ein \mathcal{NP} -Problem entscheidet
 - Π_2^P : Sprachen von OTMs, deren Orakel ein $co-\mathcal{NP}$ -Problem entscheidet
- **$PSPACE$**
 - Platzverbrauch polynomiell relativ zur Größe der Eingabe

ES GIBT WEITERE WICHTIGE KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- **$co-NP$**
 - Probleme mit Komplement in NP
 - Problem muß nicht notwendigerweise selbst in NP liegen
- **Σ_i^P / Π_i^P**
 - Σ_2^P : Sprachen von OTMs, deren Orakel ein NP -Problem entscheidet
 - Π_2^P : Sprachen von OTMs, deren Orakel ein $co-NP$ -Problem entscheidet
- **$PSPACE$**
 - Platzverbrauch polynomiell relativ zur Größe der Eingabe
- **$LOGSPACE$**
 - Platzverbrauch der Berechnung logarithmisch in Größe der Eingabe

ES GIBT WEITERE WICHTIGE KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- **$co-\mathcal{NP}$**
 - Probleme mit Komplement in \mathcal{NP}
 - Problem muß nicht notwendigerweise selbst in \mathcal{NP} liegen
- **Σ_i^P / Π_i^P**
 - Σ_2^P : Sprachen von OTMs, deren Orakel ein \mathcal{NP} -Problem entscheidet
 - Π_2^P : Sprachen von OTMs, deren Orakel ein $co-\mathcal{NP}$ -Problem entscheidet
- **$PSPACE$**
 - Platzverbrauch polynomiell relativ zur Größe der Eingabe
- **$LOGSPACE$**
 - Platzverbrauch der Berechnung logarithmisch in Größe der Eingabe
- **$EXPTIME / EXPSPACE$**
 - Rechenzeit und Platzverbrauch werden nicht mehr handhabbar

co-NP: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$\mathit{co-C} := \{L \mid \bar{L} \in C\}$$

co-NP: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

- **Interessant für nichtdeterministische Klassen**

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

- **Interessant für nichtdeterministische Klassen**
 - Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

- **Interessant für nichtdeterministische Klassen**
 - Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
 - Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel **einen** akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

- **Interessant für nichtdeterministische Klassen**
 - Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
 - Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel **einen** akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann
- **Beispiele für Probleme in $co-\mathcal{NP}$:**

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

- **Interessant für nichtdeterministische Klassen**
 - Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
 - Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel **einen** akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann
- **Beispiele für Probleme in $co-\mathcal{NP}$:**
 - Menge der allgemeingültigen Formeln (Komplement von SAT)

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

- **Interessant für nichtdeterministische Klassen**
 - Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
 - Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel **einen** akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann
- **Beispiele für Probleme in $co-\mathcal{NP}$:**
 - Menge der allgemeingültigen Formeln (Komplement von SAT)
 - Das Primzahlproblem (Komplement von Zusammengesetztheit)

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

- **Interessant für nichtdeterministische Klassen**
 - Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
 - Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel **einen** akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann
- **Beispiele für Probleme in $co-\mathcal{NP}$:**
 - Menge der allgemeingültigen Formeln (Komplement von SAT)
 - Das Primzahlproblem (Komplement von Zusammengesetztheit)
- **Es gibt Probleme in $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP}$**

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

● Interessant für nichtdeterministische Klassen

- Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
- Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel **einen** akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann

● Beispiele für Probleme in $co-\mathcal{NP}$:

- Menge der allgemeingültigen Formeln (Komplement von SAT)
- Das Primzahlproblem (Komplement von Zusammengesetztheit)

● Es gibt Probleme in $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP}$

- Das Primzahlproblem liegt auch in \mathcal{NP}

HMU, Satz 11.26

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

● Interessant für nichtdeterministische Klassen

- Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
- Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel einen akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann

● Beispiele für Probleme in $co-\mathcal{NP}$:

- Menge der allgemeingültigen Formeln (Komplement von SAT)
- Das Primzahlproblem (Komplement von Zusammengesetztheit)

● Es gibt Probleme in $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP}$

- Das Primzahlproblem liegt auch in \mathcal{NP} HMU, Satz 11.26
Mittlerweile ist $PRIMES \in \mathcal{P}$ bekannt (Gilt $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP} = \mathcal{P}$?)

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

- **Interessant für nichtdeterministische Klassen**
 - Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
 - Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel **einen** akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann
- **Beispiele für Probleme in $co-\mathcal{NP}$:**
 - Menge der allgemeingültigen Formeln (Komplement von SAT)
 - Das Primzahlproblem (Komplement von Zusammengesetztheit)
- **Es gibt Probleme in $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP}$**
 - Das Primzahlproblem liegt auch in \mathcal{NP} HMU, Satz 11.26
Mittlerweile ist $PRIMES \in \mathcal{P}$ bekannt (Gilt $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP} = \mathcal{P}$?)
- **Sehr wahrscheinlich gilt $co-\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$**

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

● Interessant für nichtdeterministische Klassen

- Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
- Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel **einen** akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann

● Beispiele für Probleme in $co-\mathcal{NP}$:

- Menge der allgemeingültigen Formeln (Komplement von SAT)
- Das Primzahlproblem (Komplement von Zusammengesetztheit)

● Es gibt Probleme in $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP}$

- Das Primzahlproblem liegt auch in \mathcal{NP} HMU, Satz 11.26
Mittlerweile ist $PRIMES \in \mathcal{P}$ bekannt (Gilt $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP} = \mathcal{P}$?)

● Sehr wahrscheinlich gilt $co-\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$

- Wenn $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, dann $co-\mathcal{NP} = co-\mathcal{P} = \mathcal{P} = \mathcal{NP}$

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{C} \}$$

● Interessant für nichtdeterministische Klassen

- Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
- Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel einen akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann

● Beispiele für Probleme in $co-\mathcal{NP}$:

- Menge der allgemeingültigen Formeln (Komplement von SAT)
- Das Primzahlproblem (Komplement von Zusammengesetztheit)

● Es gibt Probleme in $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP}$

- Das Primzahlproblem liegt auch in \mathcal{NP} HMU, Satz 11.26
Mittlerweile ist $PRIMES \in \mathcal{P}$ bekannt (Gilt $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP} = \mathcal{P}$?)

● Sehr wahrscheinlich gilt $co-\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$

- Wenn $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, dann $co-\mathcal{NP} = co-\mathcal{P} = \mathcal{P} = \mathcal{NP}$
- $\mathcal{NP} = co-\mathcal{NP} \Leftrightarrow \mathcal{NPC} \cap co-\mathcal{NP} \neq \emptyset$

$co-\mathcal{NP}$: PROBLEME MIT KOMPLEMENT IN \mathcal{NP}

$$co-\mathcal{C} := \{L \mid \bar{L} \in \mathcal{C}\}$$

● Interessant für nichtdeterministische Klassen

- Für deterministische Komplexitätsklassen gilt $\mathcal{C} = co-\mathcal{C}$
Akzeptieren/Verwerfen einer DTM ist vertauschbar
- Nichtdeterministisches Akzeptieren ist komplizierter:
OTM akzeptiert, wenn Orakel einen akzeptablen Lösungsvorschlag machen kann

● Beispiele für Probleme in $co-\mathcal{NP}$:

- Menge der allgemeingültigen Formeln (Komplement von SAT)
- Das Primzahlproblem (Komplement von Zusammengesetztheit)

● Es gibt Probleme in $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP}$

- Das Primzahlproblem liegt auch in \mathcal{NP} HMU, Satz 11.26
Mittlerweile ist $PRIMES \in \mathcal{P}$ bekannt (Gilt $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP} = \mathcal{P}$?)

● Sehr wahrscheinlich gilt $co-\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$

- Wenn $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, dann $co-\mathcal{NP} = co-\mathcal{P} = \mathcal{P} = \mathcal{NP}$
- $\mathcal{NP} = co-\mathcal{NP} \Leftrightarrow \mathcal{NPC} \cap co-\mathcal{NP} \neq \emptyset$

\Rightarrow : offensichtlich, da $\mathcal{NPC} \neq \emptyset$

\Leftarrow : Ist $L \in \mathcal{NPC} \cap co-\mathcal{NP}$ so gilt $\bar{L}' \leq_p L$ für jedes $L' \in co-\mathcal{NP}$ also $L' \leq_p \bar{L} \in \mathcal{NP}$

PSPACE: POLYNOMIELLER PLATZVERBRAUCH

- *NP* \subseteq *PSPACE*

- Eine Maschine kann in polynomieller Zeit nur polynomiell viele Speicherzellen verwenden

PSPACE: POLYNOMIELLER PLATZVERBRAUCH

- $\mathcal{NP} \subseteq PSPACE$

- Eine Maschine kann in polynomieller Zeit nur polynomiell viele Speicherzellen verwenden

- $NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)^2)$ (Satz von Savitch)

PSPACE: POLYNOMIELLER PLATZVERBRAUCH

- $\mathcal{NP} \subseteq PSPACE$

- Eine Maschine kann in polynomieller Zeit nur polynomiell viele Speicherzellen verwenden

- $NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)^2)$ (Satz von Savitch)

- Simulation mit Speicherung der Alternativen (§4.1) zu platzaufwendig

PSPACE: POLYNOMIELLER PLATZVERBRAUCH

- $\mathcal{NP} \subseteq PSPACE$

- Eine Maschine kann in polynomieller Zeit nur polynomiell viele Speicherzellen verwenden

- $NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)^2)$ (Satz von Savitch)

- Simulation mit Speicherung der Alternativen (§4.1) zu platzaufwendig
- Teste $\kappa_\alpha \vdash^t \kappa_\omega$ (für maximales $t=2^{c \cdot f(n)}$) durch “binäre Tiefensuche”

PSPACE: POLYNOMIELLER PLATZVERBRAUCH

- $\mathcal{NP} \subseteq PSPACE$

- Eine Maschine kann in polynomieller Zeit nur polynomiell viele Speicherzellen verwenden

- $NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)^2)$ (Satz von Savitch)

- Simulation mit Speicherung der Alternativen (§4.1) zu platzaufwendig
- Teste $\kappa_\alpha \vdash^t \kappa_\omega$ (für maximales $t=2^{c \cdot f(n)}$) durch “binäre Tiefensuche”
- Platzverbrauch des Rekursionsstacks ist $\mathcal{O}(f(n)^2)$ (falls $f(n) \geq \log n$)
- Zeitaufwand der Simulation ist exponentiell höher als bei der NTM

PSPACE: POLYNOMIELLER PLATZVERBRAUCH

- $\mathcal{NP} \subseteq PSPACE$

- Eine Maschine kann in polynomieller Zeit nur polynomiell viele Speicherzellen verwenden

- $NPSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)^2)$ (Satz von Savitch)

- Simulation mit Speicherung der Alternativen (§4.1) zu platzaufwendig
- Teste $\kappa_\alpha \vdash^t \kappa_\omega$ (für maximales $t=2^{c \cdot f(n)}$) durch “binäre Tiefensuche”
- Platzverbrauch des Rekursionsstacks ist $\mathcal{O}(f(n)^2)$ (falls $f(n) \geq \log n$)
- Zeitaufwand der Simulation ist exponentiell höher als bei der NTM

- $PSPACE = NPSPACE$

HMU §11.2.3

- Folgt direkt aus dem Satz von Savitch

PSPACE: POLYNOMIELLER PLATZVERBRAUCH

- *NP* \subseteq *PSPACE*

- Eine Maschine kann in polynomieller Zeit nur polynomiell viele Speicherzellen verwenden

- *NSPACE*($f(n)$) \subseteq *SPACE*($f(n)^2$) (Satz von Savitch)

- Simulation mit Speicherung der Alternativen (§4.1) zu platzaufwendig
- Teste $\kappa_\alpha \vdash^t \kappa_\omega$ (für maximales $t=2^{c \cdot f(n)}$) durch “binäre Tiefensuche”
- Platzverbrauch des Rekursionsstacks ist $\mathcal{O}(f(n)^2)$ (falls $f(n) \geq \log n$)
- Zeitaufwand der Simulation ist exponentiell höher als bei der NTM

- *PSPACE* = *NPSPACE*

HMU §11.2.3

- Folgt direkt aus dem Satz von Savitch

- *PSPACE* \subseteq *EXPTIME*

PSPACE: POLYNOMIELLER PLATZVERBRAUCH

● $\mathcal{NP} \subseteq PSPACE$

- Eine Maschine kann in polynomieller Zeit nur polynomiell viele Speicherzellen verwenden

● $NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)^2)$ (Satz von Savitch)

- Simulation mit Speicherung der Alternativen (§4.1) zu platzaufwendig
- Teste $\kappa_\alpha \vdash^t \kappa_\omega$ (für maximales $t=2^{c \cdot f(n)}$) durch “binäre Tiefensuche”
- Platzverbrauch des Rekursionsstacks ist $\mathcal{O}(f(n)^2)$ (falls $f(n) \geq \log n$)
- Zeitaufwand der Simulation ist exponentiell höher als bei der NTM

● $PSPACE = NPSPACE$ HMU §11.2.3

- Folgt direkt aus dem Satz von Savitch

● $PSPACE \subseteq EXPTIME$

- Eine terminierende Maschine, die maximal $f(n)$ Bandzellen aufsucht, terminiert nach maximal $c^{1+f(n)}$ Schritten
- Für $|\Gamma| + |Q| = c$ sind maximal $c^{1+f(n)}$ Konfigurationen möglich

PSPACE: POLYNOMIELLER PLATZVERBRAUCH

● $\mathcal{NP} \subseteq PSPACE$

- Eine Maschine kann in polynomieller Zeit nur polynomiell viele Speicherzellen verwenden

● $NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)^2)$ (Satz von Savitch)

- Simulation mit Speicherung der Alternativen (§4.1) zu platzaufwendig
- Teste $\kappa_\alpha \vdash^t \kappa_\omega$ (für maximales $t=2^{c \cdot f(n)}$) durch “binäre Tiefensuche”
- Platzverbrauch des Rekursionsstacks ist $\mathcal{O}(f(n)^2)$ (falls $f(n) \geq \log n$)
- Zeitaufwand der Simulation ist exponentiell höher als bei der NTM

● $PSPACE = NPSPACE$ HMU §11.2.3

- Folgt direkt aus dem Satz von Savitch

● $PSPACE \subseteq EXPTIME$

- Eine terminierende Maschine, die maximal $f(n)$ Bandzellen aufsucht, terminiert nach maximal $c^{1+f(n)}$ Schritten
- Für $|\Gamma| + |Q| = c$ sind maximal $c^{1+f(n)}$ Konfigurationen möglich

$NPSPACE \subseteq NEXPTIME$ gilt aus dem gleichen Grund

PSPACE-VOLLSTÄNDIGKEIT

- **\mathcal{C} -Vollständigkeit allgemein**
 - L ist \mathcal{C} -vollständig, falls $L \in \mathcal{C}$ und $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{C}$

PSPACE-VOLLSTÄNDIGKEIT

- **\mathcal{C} -Vollständigkeit allgemein**
 - L ist \mathcal{C} -vollständig, falls $L \in \mathcal{C}$ und $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{C}$
- **Wie zeigt man *PSPACE*-Vollständigkeit?**
 - Codiere Berechnungen von DTMs, die polynomiellen Platz brauchen
 - Sprache: komplexer als *SAT*, aber mit deterministischer Natur

PSPACE-VOLLSTÄNDIGKEIT

- **\mathcal{C} -Vollständigkeit allgemein**
 - L ist \mathcal{C} -vollständig, falls $L \in \mathcal{C}$ und $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{C}$
- **Wie zeigt man *PSPACE*-Vollständigkeit?**
 - Codiere Berechnungen von DTMs, die polynomiellen Platz brauchen
 - Sprache: komplexer als *SAT*, aber mit deterministischer Natur
 - Kandidat: Wahrheit geschlossener quantifizierter boolescher Formeln

PSPACE-VOLLSTÄNDIGKEIT

- **\mathcal{C} -Vollständigkeit allgemein**
 - L ist \mathcal{C} -vollständig, falls $L \in \mathcal{C}$ und $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{C}$
- **Wie zeigt man PSPACE-Vollständigkeit?**
 - Codiere Berechnungen von DTMs, die polynomiellen Platz brauchen
 - Sprache: komplexer als SAT , aber mit deterministischer Natur
 - Kandidat: Wahrheit geschlossener quantifizierter boolescher Formeln
- **Erweitere Aussagenlogik um boolesche Quantoren**
 - Aussagenlogische Variablen P, Q, R, \dots , Konstante t und f
 - Formeln $\neg F, E \wedge F, E \vee F, E \Rightarrow F, (\forall P)F, (\exists P)F$

PSPACE-VOLLSTÄNDIGKEIT

- **\mathcal{C} -Vollständigkeit allgemein**
 - L ist \mathcal{C} -vollständig, falls $L \in \mathcal{C}$ und $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{C}$
- **Wie zeigt man PSPACE-Vollständigkeit?**
 - Codiere Berechnungen von DTMs, die polynomiellen Platz brauchen
 - Sprache: komplexer als SAT , aber mit deterministischer Natur
 - Kandidat: Wahrheit geschlossener quantifizierter boolescher Formeln
- **Erweitere Aussagenlogik um boolesche Quantoren**
 - Aussagenlogische Variablen P, Q, R, \dots , Konstante t und f
 - Formeln $\neg F, E \wedge F, E \vee F, E \Rightarrow F, (\forall P)F, (\exists P)F$
 - Wert von $(\forall P)F$ entspricht dem von $F[t/P] \wedge F[f/P]$
 - Wert von $(\exists P)F$ entspricht dem von $F[t/P] \vee F[f/P]$
 - Wert anderer Formeln wie in gewöhnlicher Aussagenlogik

PSPACE-VOLLSTÄNDIGKEIT

- **\mathcal{C} -Vollständigkeit allgemein**
 - L ist \mathcal{C} -vollständig, falls $L \in \mathcal{C}$ und $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{C}$
- **Wie zeigt man PSPACE-Vollständigkeit?**
 - Codiere Berechnungen von DTMs, die polynomiellen Platz brauchen
 - Sprache: komplexer als SAT , aber mit deterministischer Natur
 - Kandidat: Wahrheit geschlossener quantifizierter boolescher Formeln
- **Erweitere Aussagenlogik um boolesche Quantoren**
 - Aussagenlogische Variablen P, Q, R, \dots , Konstante t und f
 - Formeln $\neg F$, $E \wedge F$, $E \vee F$, $E \Rightarrow F$, $(\forall P)F$, $(\exists P)F$
 - Wert von $(\forall P)F$ entspricht dem von $F[t/P] \wedge F[f/P]$
 - Wert von $(\exists P)F$ entspricht dem von $F[t/P] \vee F[f/P]$
 - Wert anderer Formeln wie in gewöhnlicher Aussagenlogik
 - $(\forall P)(\exists Q) [(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)]$ ist wahr (Wert 1)
 - $(\exists Q)(\forall P) [(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)]$ ist falsch (Wert 0)

PSPACE-VOLLSTÄNDIGKEIT

- **C-Vollständigkeit allgemein**

- L ist **C-vollständig**, falls $L \in \mathcal{C}$ und $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{C}$

- **Wie zeigt man PSPACE-Vollständigkeit?**

- Codiere Berechnungen von DTMs, die polynomiellen Platz brauchen
- Sprache: komplexer als *SAT*, aber mit deterministischer Natur
- Kandidat: **Wahrheit geschlossener quantifizierter boolescher Formeln**

- **Erweitere Aussagenlogik um boolesche Quantoren**

- Aussagenlogische Variablen P, Q, R, \dots , Konstante t und f
- Formeln $\neg F$, $E \wedge F$, $E \vee F$, $E \Rightarrow F$, $(\forall P)F$, $(\exists P)F$
- Wert von $(\forall P)F$ entspricht dem von $F[t/P] \wedge F[f/P]$
- Wert von $(\exists P)F$ entspricht dem von $F[t/P] \vee F[f/P]$
- Wert anderer Formeln wie in gewöhnlicher Aussagenlogik

$(\forall P)(\exists Q) [(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)]$ ist wahr (Wert 1)

$(\exists Q)(\forall P) [(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)]$ ist falsch (Wert 0)

QBF ist die Menge der geschlossenen QB-Formeln mit Wert 1

QBF IST *PSPACE*-VOLLSTÄNDIG

- ***QBF* ∈ *PSPACE***

- Auswerten aussagenlogischer Formeln braucht linearen Platz
- $(\forall P)F = F[t/P] \wedge F[f/P]$ und $(\exists P)F = F[t/P] \vee F[f/P]$
werden kaskadisch ausgewertet

QBF IST *PSPACE*-VOLLSTÄNDIG

- ***QBF* ∈ *PSPACE***

- Auswerten aussagenlogischer Formeln braucht linearen Platz
- $(\forall P)F = F[t/P] \wedge F[f/P]$ und $(\exists P)F = F[t/P] \vee F[f/P]$
werden kaskadisch ausgewertet
- Gesamtbedarf, einschließlich Zwischenspeicherung, ist quadratisch

QBF IST *PSPACE*-VOLLSTÄNDIG

- ***QBF* ∈ *PSPACE***

- Auswerten aussagenlogischer Formeln braucht linearen Platz
- $(\forall P)F = F[t/P] \wedge F[f/P]$ und $(\exists P)F = F[t/P] \vee F[f/P]$ werden kaskadisch ausgewertet
- Gesamtbedarf, einschließlich Zwischenspeicherung, ist **quadratisch**

- **Für alle $L \in PSPACE$ gilt $L \leq_p QBF$** HMU §11.3.4

- Codiere Bandzellen und Konfigurationen wie im Satz von Cook

QBF IST PSPACE-VOLLSTÄNDIG

- **QBF \in PSPACE**

- Auswerten aussagenlogischer Formeln braucht linearen Platz
- $(\forall P)F = F[t/P] \wedge F[f/P]$ und $(\exists P)F = F[t/P] \vee F[f/P]$ werden kaskadisch ausgewertet
- Gesamtbedarf, einschließlich Zwischenspeicherung, ist quadratisch

- **Für alle $L \in PSPACE$ gilt $L \leq_p QBF$** HMU §11.3.4

- Codiere Bandzellen und Konfigurationen wie im Satz von Cook
- Beschreibe Formeln $F_{\kappa_1, \kappa_2, t}$ für die Aussage $\kappa_1 \vdash^t \kappa_2$

QBF IST PSPACE-VOLLSTÄNDIG

● **QBF \in PSPACE**

- Auswerten aussagenlogischer Formeln braucht linearen Platz
- $(\forall P)F = F[t/P] \wedge F[f/P]$ und $(\exists P)F = F[t/P] \vee F[f/P]$ werden kaskadisch ausgewertet
- Gesamtbedarf, einschließlich Zwischenspeicherung, ist quadratisch

● **Für alle $L \in PSPACE$ gilt $L \leq_p QBF$** HMU §11.3.4

- Codiere Bandzellen und Konfigurationen wie im Satz von Cook
- Beschreibe Formeln $F_{\kappa_1, \kappa_2, t}$ für die Aussage $\kappa_1 \vdash^t \kappa_2$
- Zielformel ist $F_{\kappa_\alpha, \kappa_\omega, 2^{c \cdot p(n)}}$, wobei κ_α Anfangskonfiguration, κ_ω Endkonfiguration, $p(n)$ Platzverbrauch, c Alternativen pro Zelle

QBF IST PSPACE-VOLLSTÄNDIG

● $QBF \in PSPACE$

- Auswerten aussagenlogischer Formeln braucht linearen Platz
- $(\forall P)F = F[t/P] \wedge F[f/P]$ und $(\exists P)F = F[t/P] \vee F[f/P]$ werden kaskadisch ausgewertet
- Gesamtbedarf, einschließlich Zwischenspeicherung, ist quadratisch

● Für alle $L \in PSPACE$ gilt $L \leq_p QBF$ HMU §11.3.4

- Codiere Bandzellen und Konfigurationen wie im Satz von Cook
- Beschreibe Formeln $F_{\kappa_1, \kappa_2, t}$ für die Aussage $\kappa_1 \vdash^t \kappa_2$
- Zielformel ist $F_{\kappa_\alpha, \kappa_\omega, 2^{c \cdot p(n)}}$, wobei κ_α Anfangskonfiguration, κ_ω Endkonfiguration, $p(n)$ Platzverbrauch, c Alternativen pro Zelle
- Setze $F_{\kappa_1, \kappa_1, 0}$ und beschreibe $F_{\kappa_1, \kappa_2, 1}$ passend zur Tabelle von δ

QBF IST PSPACE-VOLLSTÄNDIG

● $QBF \in PSPACE$

- Auswerten aussagenlogischer Formeln braucht linearen Platz
- $(\forall P)F = F[t/P] \wedge F[f/P]$ und $(\exists P)F = F[t/P] \vee F[f/P]$ werden kaskadisch ausgewertet
- Gesamtbedarf, einschließlich Zwischenspeicherung, ist quadratisch

● Für alle $L \in PSPACE$ gilt $L \leq_p QBF$ HMU §11.3.4

- Codiere Bandzellen und Konfigurationen wie im Satz von Cook
 - Beschreibe Formeln $F_{\kappa_1, \kappa_2, t}$ für die Aussage $\kappa_1 \vdash^t \kappa_2$
 - Zielformel ist $F_{\kappa_\alpha, \kappa_\omega, 2^{c \cdot p(n)}}$, wobei κ_α Anfangskonfiguration, κ_ω Endkonfiguration, $p(n)$ Platzverbrauch, c Alternativen pro Zelle
 - Setze $F_{\kappa_1, \kappa_1, 0}$ und beschreibe $F_{\kappa_1, \kappa_2, 1}$ passend zur Tabelle von δ
 - Beschreibe $F_{\kappa_1, \kappa_2, t}$ durch eine Darstellung für $(\exists \kappa) F_{\kappa_1, \kappa, t \div 2} \wedge F_{\kappa, \kappa_2, t \div 2}$, die das Entstehen exponentiell großer Formeln vermeidet
- $$(\exists \kappa)(\forall \kappa_3)(\forall \kappa_4)[(\kappa_3 \Leftrightarrow \kappa_1 \wedge \kappa_4 \Leftrightarrow \kappa) \vee (\kappa_3 \Leftrightarrow \kappa \wedge \kappa_4 \Leftrightarrow \kappa_2)] \Rightarrow F_{\kappa_3, \kappa_4, t \div 2}$$

WEITERE *PSPACE*-VOLLSTÄNDIGE PROBLEME

- **Strategische 2-Personen Spiele**
 - Viele konkrete Beispiele in [Garey/Johnson Seite 254ff](#)

● Strategische 2-Personen Spiele

– Viele konkrete Beispiele in [Garey/Johnson Seite 254ff](#)

– Spielentscheidungen entsprechen alternierenden QB Formeln

Spieler gewinnt, wenn für jeden Zug des Gegners, ein Zug existiert, so daß für jeden Folgezug des Gegners, ... das Resultat einen Sieg darstellt

● Strategische 2-Personen Spiele

- Viele konkrete Beispiele in [Garey/Johnson Seite 254ff](#)
- Spielentscheidungen entsprechen alternierenden QB Formeln
Spieler gewinnt, wenn für jeden Zug des Gegners, ein Zug existiert, so daß für jeden Folgezug des Gegners, ... das Resultat einen Sieg darstellt
- QBF kann als strategisches Spiel beschrieben werden (und umgekehrt)

● Strategische 2-Personen Spiele

- Viele konkrete Beispiele in [Garey/Johnson Seite 254ff](#)
- Spielentscheidungen entsprechen alternierenden QB Formeln
Spieler gewinnt, wenn für jeden Zug des Gegners, ein Zug existiert, so daß für jeden Folgezug des Gegners, ... das Resultat einen Sieg darstellt
- QBF kann als strategisches Spiel beschrieben werden (und umgekehrt)

● Sprache regulärer Ausdrücke

- Ist $L(E) = \Sigma^*$ für einen beliebigen regulären Ausdruck über Σ ?

WEITERE *PSPACE*-VOLLSTÄNDIGE PROBLEME

● **Strategische 2-Personen Spiele**

- Viele konkrete Beispiele in [Garey/Johnson Seite 254ff](#)
- Spielentscheidungen entsprechen alternierenden QB Formeln
Spieler gewinnt, wenn für jeden Zug des Gegners, ein Zug existiert, so daß für jeden Folgezug des Gegners, ... das Resultat einen Sieg darstellt
- QBF kann als strategisches Spiel beschrieben werden (und umgekehrt)

● **Sprache regulärer Ausdrücke**

- Ist $L(E) = \Sigma^*$ für einen beliebigen regulären Ausdruck über Σ ?

● **In-Place Acceptance**

[Asteroth/Baier §4.5](#)

- Kann eine gegebene DTM jedes Wort w ihrer Sprache mit Platzbedarf $|w|$ akzeptieren?

LOGSPACE LOGARITHMISCHER PLATZVERBRAUCH

- *LOGSPACE* \subseteq \mathcal{P}

- Gleiches Argument wie bei *PSPACE* \subseteq *EXPTIME*

LOGSPACE LOGARITHMISCHER PLATZVERBRAUCH

- *LOGSPACE* \subseteq \mathcal{P}
 - Gleiches Argument wie bei *PSPACE* \subseteq *EXPTIME*
- *LOGSPACE* $\stackrel{?}{=} NLOGSPACE$ ist ungeklärt
 - Analyse benötigt Begriff der *log-space Reduzierbarkeit*

LOGSPACE LOGARITHMISCHER PLATZVERBRAUCH

- *LOGSPACE* \subseteq \mathcal{P}

- Gleiches Argument wie bei *PSPACE* \subseteq *EXPTIME*

- *LOGSPACE* $\stackrel{?}{=} NLOGSPACE$ ist ungeklärt

- Analyse benötigt Begriff der *log-space Reduzierbarkeit*

- Es gibt *NLOGSPACE*-vollständige Probleme

Sipser Satz 8.20

- *PATH* = $\{ (G, v, v') \mid G=(V, E) \text{ gerichteter Graph} \wedge \exists \{v = v_1, \dots, v_n = v'\} \subseteq V. v_1..v_n \text{ Pfad in } G \}$

LOGSPACE LOGARITHMISCHER PLATZVERBRAUCH

- **LOGSPACE** \subseteq \mathcal{P}

- Gleiches Argument wie bei $PSPACE \subseteq EXPTIME$

- **LOGSPACE** $\stackrel{?}{=} NLOGSPACE$ ist ungeklärt

- Analyse benötigt Begriff der **log-space Reduzierbarkeit**

- Es gibt **NLOGSPACE-vollständige Probleme**

Sipser Satz 8.20

- **PATH** = $\{ (G, v, v') \mid G=(V, E) \text{ gerichteter Graph} \wedge \exists \{v = v_1, \dots, v_n = v'\} \subseteq V. v_1..v_n \text{ Pfad in } G \}$

- **NLOGSPACE** \subseteq \mathcal{P}

Sipser Korollar 8.21

- **PATH** ist in polynomieller Zeit lösbar

LOGSPACE LOGARITHMISCHER PLATZVERBRAUCH

- **LOGSPACE** \subseteq \mathcal{P}

- Gleiches Argument wie bei $PSPACE \subseteq EXPTIME$

- **LOGSPACE** $\stackrel{?}{=} NLOGSPACE$ ist ungeklärt

- Analyse benötigt Begriff der **log-space Reduzierbarkeit**

- Es gibt **NLOGSPACE-vollständige Probleme**

Sipser Satz 8.20

- **PATH** = $\{ (G, v, v') \mid G=(V, E) \text{ gerichteter Graph} \wedge \exists \{v = v_1, \dots, v_n = v'\} \subseteq V. v_1..v_n \text{ Pfad in } G \}$

- **NLOGSPACE** \subseteq \mathcal{P}

Sipser Korollar 8.21

- **PATH** ist in polynomieller Zeit lösbar

- **NLOGSPACE** = **co-NLOGSPACE**

Sipser Satz 8.22

- \overline{PATH} liegt auch in **NLOGSPACE**

WICHTIGE VERTRETER WEITERER KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- **Isomorphie ungerichteter Graphen**

\mathcal{NP} , nicht vollständig

WICHTIGE VERTRETER WEITERER KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** \mathcal{NP} , nicht vollständig
- **Zuverlässigkeit von Netzwerken** \mathcal{NP} -hart, vermutlich nicht in \mathcal{NP}
 - Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Verbindung zwischen zwei Knoten

WICHTIGE VERTRETER WEITERER KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** \mathcal{NP} , nicht vollständig
- **Zuverlässigkeit von Netzwerken** \mathcal{NP} -hart, vermutlich nicht in \mathcal{NP}
 - Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Verbindung zwischen zwei Knoten
- **Minimale äquivalente Schaltkreise** \mathcal{NP} -hart, nicht in \mathcal{NP} (“ Σ_2^P ”)
 - Bestimme optimale Größe einer Schaltung

WICHTIGE VERTRETER WEITERER KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** \mathcal{NP} , nicht vollständig
- **Zuverlässigkeit von Netzwerken** \mathcal{NP} -hart, vermutlich nicht in \mathcal{NP}
 - Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Verbindung zwischen zwei Knoten
- **Minimale äquivalente Schaltkreise** \mathcal{NP} -hart, nicht in \mathcal{NP} (“ Σ_2^P ”)
 - Bestimme optimale Größe einer Schaltung
- **$n \times n$ -Schach, Dame, Go**
 - Exponentiell viele Züge bis Spielende möglich $EXPTIME$ (-vollständig)

WICHTIGE VERTRETER WEITERER KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** \mathcal{NP} , nicht vollständig
- **Zuverlässigkeit von Netzwerken** \mathcal{NP} -hart, vermutlich nicht in \mathcal{NP}
 - Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Verbindung zwischen zwei Knoten
- **Minimale äquivalente Schaltkreise** \mathcal{NP} -hart, nicht in \mathcal{NP} (“ Σ_2^P ”)
 - Bestimme optimale Größe einer Schaltung
- **$n \times n$ -Schach, Dame, Go**
 - Exponentiell viele Züge bis Spielende möglich $EXPTIME$ (-vollständig)
- **TSP***: Bestimmung **aller** Rundreisen mit gegebenen Kosten
 - Unrealistische Problemstellung: zu viele Lösungen $EXPSPACE$

WICHTIGE VERTRETER WEITERER KOMPLEXITÄTSKLASSEN

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** \mathcal{NP} , nicht vollständig
- **Zuverlässigkeit von Netzwerken** \mathcal{NP} -hart, vermutlich nicht in \mathcal{NP}
 - Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Verbindung zwischen zwei Knoten
- **Minimale äquivalente Schaltkreise** \mathcal{NP} -hart, nicht in \mathcal{NP} (“ Σ_2^P ”)
 - Bestimme optimale Größe einer Schaltung
- **$n \times n$ -Schach, Dame, Go**
 - Exponentiell viele Züge bis Spielende möglich $EXPTIME$ (-vollständig)
- **TSP***: Bestimmung **aller** Rundreisen mit gegebenen Kosten
 - Unrealistische Problemstellung: zu viele Lösungen $EXPSPACE$
- **Äquivalenz regulärer Ausdrücke mit Iteration**
 - Einfache Problemstellung mit sehr schwieriger Lösung
 - Ausdrücke dürfen $E^k = \underbrace{E \circ E \dots \circ E}_{k\text{-mal}}$ enthalten $EXPSPACE$ -vollständig

BEDEUTET MEHR ZEIT/PLATZ AUCH MEHR LÖSBARE PROBLEME?

- Welche der folgenden Inklusionen sind echt?

$LOGSPACE \subseteq NLOGSPACE$

$\subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq PSPACE = NPSPACE$

$\subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME \subseteq EXPSPACE \subseteq \dots$

BEDEUTET MEHR ZEIT/PLATZ AUCH MEHR LÖSBARE PROBLEME?

- **Welche der folgenden Inklusionen sind echt?**

$LOGSPACE \subseteq NLOGSPACE$

$\subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq PSPACE = NPSPACE$

$\subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME \subseteq EXPSPACE \subseteq \dots$

- **Wie beweist man Unlösbarkeit in Platz/Zeit f**

– Diagonalisierung über alle Probleme, die in Komplexität f lösbar sind

BEDEUTET MEHR ZEIT/PLATZ AUCH MEHR LÖSBARE PROBLEME?

- Welche der folgenden Inklusionen sind echt?

$LOGSPACE \subseteq NLOGSPACE$

$\subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq PSPACE = NPSPACE$

$\subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME \subseteq EXPSPACE \subseteq \dots$

- Wie beweist man Unlösbarkeit in Platz/Zeit f

– Diagonalisierung über alle Probleme, die in Komplexität f lösbar sind

- Hilfsmittel: **Konstruierbare Funktionen**

– Funktionen, deren Komplexität durch ihren Wert beschränkt ist

BEDEUTET MEHR ZEIT/PLATZ AUCH MEHR LÖSBARE PROBLEME?

- Welche der folgenden Inklusionen sind echt?

$$\begin{aligned} & LOGSPACE \subseteq NLOGSPACE \\ & \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq PSPACE = NPSPACE \\ & \subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME \subseteq EXPSPACE \subseteq \dots \end{aligned}$$

- Wie beweist man Unlösbarkeit in Platz/Zeit f

- Diagonalisierung über alle Probleme, die in Komplexität f lösbar sind

- Hilfsmittel: **Konstruierbare Funktionen**

- Funktionen, deren Komplexität durch ihren Wert beschränkt ist

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist **platzkonstruierbar**, wenn \hat{f} in Platz $\mathcal{O}(f)$ berechenbar

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist **zeitkonstruierbar**, wenn \hat{f} in Zeit $\mathcal{O}(f)$ berechenbar

$\hat{f} : \{1\}^* \rightarrow \{0, 1, \}$ berechnet bei Eingabe 1^n die Binärdarstellung $r_b(f(n))$ von $f(n)$

Rahmenbedingungen: $f(n) \geq \log n$ (Platz) bzw. $f(n) \geq n \log n$ (Zeit) für alle n

BEDEUTET MEHR ZEIT/PLATZ AUCH MEHR LÖSBARE PROBLEME?

- Welche der folgenden Inklusionen sind echt?

$$\begin{aligned} & LOGSPACE \subseteq NLOGSPACE \\ & \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq PSPACE = NPSPACE \\ & \subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME \subseteq EXPSPACE \subseteq \dots \end{aligned}$$

- Wie beweist man Unlösbarkeit in Platz/Zeit f

- Diagonalisierung über alle Probleme, die in Komplexität f lösbar sind

- Hilfsmittel: **Konstruierbare Funktionen**

- Funktionen, deren Komplexität durch ihren Wert beschränkt ist

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist **platzkonstruierbar**, wenn \hat{f} in Platz $\mathcal{O}(f)$ berechenbar

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist **zeitkonstruierbar**, wenn \hat{f} in Zeit $\mathcal{O}(f)$ berechenbar

- $\hat{f} : \{1\}^* \rightarrow \{0, 1, \}^*$ berechnet bei Eingabe 1^n die Binärdarstellung $r_b(f(n))$ von $f(n)$

- Rahmenbedingungen: $f(n) \geq \log n$ (Platz) bzw. $f(n) \geq n \log n$ (Zeit) für alle n

- $\log n, n^k, 2^n$ etc sind zeit- und platzkonstruierbar

BEDEUTET MEHR ZEIT/PLATZ AUCH MEHR LÖSBARE PROBLEME?

- **Welche der folgenden Inklusionen sind echt?**

$$\begin{aligned} & LOGSPACE \subseteq NLOGSPACE \\ & \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq PSPACE = NPSPACE \\ & \subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME \subseteq EXPSPACE \subseteq \dots \end{aligned}$$

- **Wie beweist man Unlösbarkeit in Platz/Zeit f**

- Diagonalisierung über alle Probleme, die in Komplexität f lösbar sind

- **Hilfsmittel: Konstruierbare Funktionen**

- Funktionen, deren Komplexität durch ihren Wert beschränkt ist

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist **platzkonstruierbar**, wenn \hat{f} in Platz $\mathcal{O}(f)$ berechenbar

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist **zeitkonstruierbar**, wenn \hat{f} in Zeit $\mathcal{O}(f)$ berechenbar

- $\hat{f} : \{1\}^* \rightarrow \{0, 1, \}$ berechnet bei Eingabe 1^n die Binärdarstellung $r_b(f(n))$ von $f(n)$

- Rahmenbedingungen: $f(n) \geq \log n$ (Platz) bzw. $f(n) \geq n \log n$ (Zeit) für alle n

- $\log n, n^k, 2^n$ etc sind zeit- und platzkonstruierbar

- **Wichtiger formaler Begriff: Ordnung $o(f)$**

- f als echte obere Schranke: $o(f) = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \forall c > 0. g <_a c * f\}$

DAS PLATZHIERARCHIE-THEOREM

Für jede platzkonstruierbare Funktion f gibt es ein $L \in SPACE(f)$ mit Platzkomplexität nicht in $o(f)$

DAS PLATZHIERARCHIE-THEOREM

Für jede platzkonstruierbare Funktion f gibt es ein $L \in SPACE(f)$ mit Platzkomplexität nicht in $o(f)$

- **Konstruiere L durch Diagonalisierung**
 - Definiere L durch seine charakteristische Funktion

DAS PLATZHIERARCHIE-THEOREM

Für jede platzkonstruierbare Funktion f gibt es ein $L \in SPACE(f)$ mit Platzkomplexität nicht in $o(f)$

● Konstruiere L durch Diagonalisierung

– Definiere L durch seine charakteristische Funktion

– Sei $h(n) = \begin{cases} 1 & \Phi_i(n) \leq 2^{f(n)} \wedge s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \wedge \varphi_i(n) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit $i = \pi_1(n)$

$s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \equiv h$ benutzt zur Simulation von $\varphi_i(n)$ maximal Platz $f(n)$.

Benutzt die Simulation von $\varphi_i(n)$ Platz $d * s_{M_i}(n)$, so muß $s_{M_i}(n) \leq f(n)/d$ gelten

DAS PLATZHIERARCHIE-THEOREM

Für jede platzkonstruierbare Funktion f gibt es ein $L \in SPACE(f)$ mit Platzkomplexität nicht in $o(f)$

● Konstruiere L durch Diagonalisierung

– Definiere L durch seine charakteristische Funktion

– Sei $h(n) = \begin{cases} 1 & \Phi_i(n) \leq 2^{f(n)} \wedge s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \wedge \varphi_i(n) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit $i = \pi_1(n)$

$s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \equiv h$ benutzt zur Simulation von $\varphi_i(n)$ maximal Platz $f(n)$.

Benutzt die Simulation von $\varphi_i(n)$ Platz $d \cdot s_{M_i}(n)$, so muß $s_{M_i}(n) \leq f(n)/d$ gelten

– h ist eine Entscheidungsfunktion, die in Platz $\mathcal{O}(f)$ berechenbar ist

– Definiere $L := h^{-1}(\{1\})$ (also $\chi_L = h$), also $L \in SPACE(f)$

DAS PLATZHIERARCHIE-THEOREM

Für jede platzkonstruierbare Funktion f gibt es ein $L \in SPACE(f)$ mit Platzkomplexität nicht in $o(f)$

● Konstruiere L durch Diagonalisierung

– Definiere L durch seine charakteristische Funktion

– Sei $h(n) = \begin{cases} 1 & \Phi_i(n) \leq 2^{f(n)} \wedge s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \wedge \varphi_i(n) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit $i = \pi_1(n)$

$s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \equiv h$ benutzt zur Simulation von $\varphi_i(n)$ maximal Platz $f(n)$.

Benutzt die Simulation von $\varphi_i(n)$ Platz $d * s_{M_i}(n)$, so muß $s_{M_i}(n) \leq f(n)/d$ gelten

– h ist eine Entscheidungsfunktion, die in Platz $\mathcal{O}(f)$ berechenbar ist

– Definiere $L := h^{-1}(\{1\})$ (also $\chi_L = h$), also $L \in SPACE(f)$

● Die Platzkomplexität von L ist nicht in $o(f)$

– Falls L durch ein Programm mit Komplexität $o(f)$ entschieden wird, so gilt $\chi_L = \varphi_k$ für ein k mit $s_{M_k}(n) < c * f(n)$ für alle $c > 0$, $n \geq n_0$

DAS PLATZHIERARCHIE-THEOREM

Für jede platzkonstruierbare Funktion f gibt es ein $L \in SPACE(f)$ mit Platzkomplexität nicht in $o(f)$

● Konstruiere L durch Diagonalisierung

– Definiere L durch seine charakteristische Funktion

– Sei $h(n) = \begin{cases} 1 & \Phi_i(n) \leq 2^{f(n)} \wedge s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \wedge \varphi_i(n) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit $i = \pi_1(n)$

$s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \equiv h$ benutzt zur Simulation von $\varphi_i(n)$ maximal Platz $f(n)$.

Benutzt die Simulation von $\varphi_i(n)$ Platz $d * s_{M_i}(n)$, so muß $s_{M_i}(n) \leq f(n)/d$ gelten

– h ist eine Entscheidungsfunktion, die in Platz $\mathcal{O}(f)$ berechenbar ist

– Definiere $L := h^{-1}(\{1\})$ (also $\chi_L = h$), also $L \in SPACE(f)$

● Die Platzkomplexität von L ist nicht in $o(f)$

– Falls L durch ein Programm mit Komplexität $o(f)$ entschieden wird,

so gilt $\chi_L = \varphi_k$ für ein k mit $s_{M_k}(n) < c * f(n)$ für alle $c > 0$, $n \geq n_0$

– Wähle $n := \langle k, n_0 \rangle$ (also $k = \pi_1(n)$) für das zu $(1/d)$ passende n_0

Dann gilt $n \geq n_0$, also $s_{M_k}(n) < (1/d) * f(n)$ bzw $s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n)$

DAS PLATZHIERARCHIE-THEOREM

Für jede platzkonstruierbare Funktion f gibt es ein $L \in SPACE(f)$ mit Platzkomplexität nicht in $o(f)$

● Konstruiere L durch Diagonalisierung

– Definiere L durch seine charakteristische Funktion

– Sei $h(n) = \begin{cases} 1 & \Phi_i(n) \leq 2^{f(n)} \wedge s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \wedge \varphi_i(n) = 0 \quad \text{mit } i = \pi_1(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \equiv h$ benutzt zur Simulation von $\varphi_i(n)$ maximal Platz $f(n)$.

Benutzt die Simulation von $\varphi_i(n)$ Platz $d * s_{M_i}(n)$, so muß $s_{M_i}(n) \leq f(n)/d$ gelten

– h ist eine Entscheidungsfunktion, die in Platz $\mathcal{O}(f)$ berechenbar ist

– Definiere $L := h^{-1}(\{1\})$ (also $\chi_L = h$), also $L \in SPACE(f)$

● Die Platzkomplexität von L ist nicht in $o(f)$

– Falls L durch ein Programm mit Komplexität $o(f)$ entschieden wird, so gilt $\chi_L = \varphi_k$ für ein k mit $s_{M_k}(n) < c * f(n)$ für alle $c > 0$, $n \geq n_0$

– Wähle $n := \langle k, n_0 \rangle$ (also $k = \pi_1(n)$) für das zu $(1/d)$ passende n_0

Dann gilt $n \geq n_0$, also $s_{M_k}(n) < (1/d) * f(n)$ bzw. $s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n)$

– Es folgt $n \in L \Leftrightarrow h(n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_k(n) = 0 \wedge s_{M_i}(n) \leq^{**} f(n) \Leftrightarrow n \notin L$

KONSEQUENZEN DES HIERARCHIETHEOREMS

- **Platzkomplexität bildet eine echte Hierarchie**

KONSEQUENZEN DES HIERARCHIETHEOREMS

- **Platzkomplexität bildet eine echte Hierarchie**
 - $SPACE(f) \subset SPACE(g)$ falls g platzkonstruierbar und $f \in o(g)$

KONSEQUENZEN DES HIERARCHIETHEOREMS

- **Platzkomplexität bildet eine echte Hierarchie**
 - $SPACE(f) \subset SPACE(g)$ falls g platzkonstruierbar und $f \in o(g)$
 - $SPACE(n^\epsilon) \subset SPACE(n^{\epsilon'})$ für alle $0 \leq \epsilon < \epsilon'$

KONSEQUENZEN DES HIERARCHIETHEOREMS

- **Platzkomplexität bildet eine echte Hierarchie**
 - $SPACE(f) \subset SPACE(g)$ falls g platzkonstruierbar und $f \in o(g)$
 - $SPACE(n^\epsilon) \subset SPACE(n^{\epsilon'})$ für alle $0 \leq \epsilon < \epsilon'$
 - $NLOGSPACE \subseteq SPACE(\log^2 n) \subset SPACE(n) \subset PSPACE$
 - $NPSPACE \subset EXPSPACE$

KONSEQUENZEN DES HIERARCHIETHEOREMS

- **Platzkomplexität bildet eine echte Hierarchie**
 - $SPACE(f) \subset SPACE(g)$ falls g platzkonstruierbar und $f \in o(g)$
 - $SPACE(n^\epsilon) \subset SPACE(n^{\epsilon'})$ für alle $0 \leq \epsilon < \epsilon'$
 - $NLOGSPACE \subseteq SPACE(\log^2 n) \subset SPACE(n) \subset PSPACE$
 - $NPSPACE \subset EXPSPACE$
- **Zeitkomplexität bildet eine echte Hierarchie**

KONSEQUENZEN DES HIERARCHIETHEOREMS

- **Platzkomplexität bildet eine echte Hierarchie**

- $SPACE(f) \subset SPACE(g)$ falls g platzkonstruierbar und $f \in o(g)$
- $SPACE(n^\epsilon) \subset SPACE(n^{\epsilon'})$ für alle $0 \leq \epsilon < \epsilon'$
- $NLOGSPACE \subseteq SPACE(\log^2 n) \subset SPACE(n) \subset PSPACE$
- $NPSPACE \subset EXPSPACE$

- **Zeitkomplexität bildet eine echte Hierarchie**

- Für jede zeitkonstruierbare Funktion f gibt es ein $L \in TIME(f)$ mit Zeitkomplexität nicht in $o(f / \log f)$
 - Beweis analog zu Platzhierarchietheorem

KONSEQUENZEN DES HIERARCHIETHEOREMS

- **Platzkomplexität bildet eine echte Hierarchie**

- $SPACE(f) \subset SPACE(g)$ falls g platzkonstruierbar und $f \in o(g)$
- $SPACE(n^\epsilon) \subset SPACE(n^{\epsilon'})$ für alle $0 \leq \epsilon < \epsilon'$
- $NLOGSPACE \subseteq SPACE(\log^2 n) \subset SPACE(n) \subset PSPACE$
- $NPSPACE \subset EXPSPACE$

- **Zeitkomplexität bildet eine echte Hierarchie**

- Für jede zeitkonstruierbare Funktion f gibt es ein $L \in TIME(f)$ mit Zeitkomplexität nicht in $o(f / \log f)$
 - Beweis analog zu Platzhierarchietheorem
- $TIME(f) \subset TIME(g)$ falls g platzkonstruierbar und $f \in o(g / \log g)$
- $TIME(n^\epsilon) \subset TIME(n^{\epsilon'})$ für alle $0 \leq \epsilon < \epsilon'$

KONSEQUENZEN DES HIERARCHIETHEOREMS

- **Platzkomplexität bildet eine echte Hierarchie**

- $SPACE(f) \subset SPACE(g)$ falls g platzkonstruierbar und $f \in o(g)$
- $SPACE(n^\epsilon) \subset SPACE(n^{\epsilon'})$ für alle $0 \leq \epsilon < \epsilon'$
- $NLOGSPACE \subseteq SPACE(\log^2 n) \subset SPACE(n) \subset PSPACE$
- $NPSPACE \subset EXPSPACE$

- **Zeitkomplexität bildet eine echte Hierarchie**

- Für jede zeitkonstruierbare Funktion f gibt es ein $L \in TIME(f)$ mit Zeitkomplexität nicht in $o(f / \log f)$
 - Beweis analog zu Plathierarchietheorem
- $TIME(f) \subset TIME(g)$ falls g platzkonstruierbar und $f \in o(g / \log g)$
- $TIME(n^\epsilon) \subset TIME(n^{\epsilon'})$ für alle $0 \leq \epsilon < \epsilon'$
- $\mathcal{P} \subset EXPTIME$

KOMPLEXITÄTSKLASSENHIERARCHIE

