# Theoretische Informatik II

## Einheit 5.4

## Elementare Berechenbarkeitstheorie I:

### Grundkonzepte und ihre Eigenschaften

1. Grundgesetze der Berechenbarkeit
2. Berechenbarkeit, Aufzählbarkeit
   und Entscheidbarkeit
3. Abschlußeigenschaften

# Elementare Berechenbarkeitstheorie

- **Es gibt viele Fragen zur Berechenbarkeit**
  - Welche Funktionen sind berechenbar und welche nicht?
  - Welche Probleme sind (semi-)entscheidbar und welche nicht?
  - Abschlußeigenschaften: wie kann man Lösungen wiederverwenden?
  - Grenzen des Machbaren: was ist nicht mehr berechenbar?
    Wie kann man nachweisen, daß ein Problem nicht lösbar ist?
- **Antworten hängen nicht vom Berechnungsmodell ab**
  - Berechenbarkeit, (semi-)Entscheidbarkeit, (Zeit-/Platz)Komplexität sind allgemeine Konzepte
- **Löse Theorie von Betrachtung konkreter Modelle**
  - Formuliere Grundeigenschaften (Axiome) berechenbarer Funktionen
  - Beweise diese Eigenschaften mit einem Modell (Turingmaschine)
  - Stütze alle Beweise für Aussagen nur noch auf diese Eigenschaften
    denn sie gelten für alle gleichmächtigen Berechnungsmodelle

# Formuliere Theorie berechenbarer Funktionen

- **Es reicht berechenbare Funktionen zu betrachten**
  – (Semi-)Entscheidbarkeit einer Menge ist äquivalent zur Berechenbarkeit ihrer (partiell-)charakteristischen Funktion
- **Es reicht Berechenbarkeit auf Zahlen zu betrachten**
  – Berechenbarkeitskonzepte auf Wörtern und Zahlen sind gleichwertig
    · Zahlen kann man als Wörter (binär oder anders) codieren
    · Wörter über einem Alphabet kann man systematisch numerieren
  – Es ist meist leichter, mit Zahlen zu arbeiten (z.B. Rechenzeit)
  – Programme und Daten sind als Zahlen codierbar
- **Es reicht einstellige Funktionen auf $\mathbb{N}{\longrightarrow}\mathbb{N}$ zu betrachten**
  – Funktionen auf Zahlenpaaren und -listen sind einstellig simulierbar
  z.B. ist $f{:}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N}{\rightarrow}\mathbb{N}$ durch $f'{:}\mathbb{N}{\rightarrow}\mathbb{N}$ mit $f'\langle i,j\rangle := f(i,j)$ simulierbar

**Liefert allgemeine Theorie der Berechenbarkeit**

# Berechenbare Funktionen lassen sich aufzählen

- **Turingmaschinen sind als Wörter codierbar**
  - Es reicht, Turingmaschinen mit $\Gamma$=$\{0, 1, B\}$ und $F$=$\{q_1\}$ zu betrachten
  - Definiere code($\delta(q,X)$) $\equiv$ $q\,X\,p\,Y\,D$, falls $\delta(q,X)$=$(p,Y,D)$
  - Codiere die Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ durch das Wort

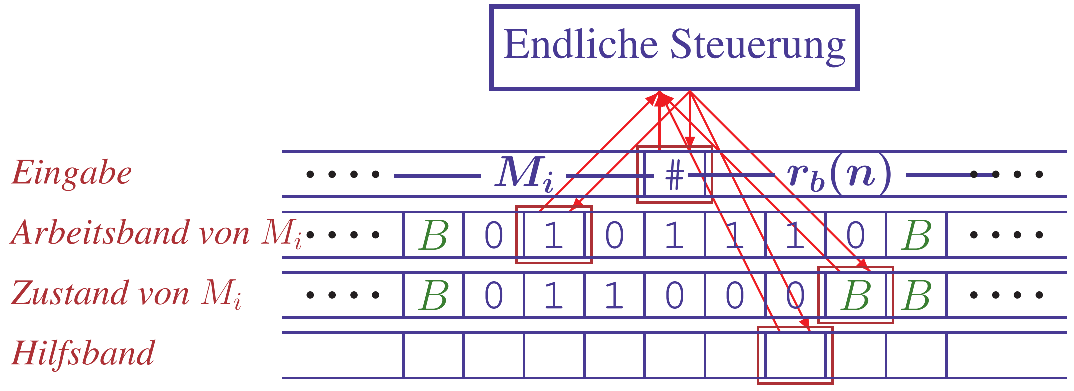
    code($\delta(q_0$,0))#code($\delta(q_0$,1))#code($\delta(q_0,B)$)#...#code($\delta(q_n,B)$)
  - Alphabet ist $\Delta = \{q_0, .., q_n, 0, 1, B, L, R, \#\}$ (Binärcodierung auch möglich)
- **Wörter über einem Alphabet sind numerierbar**
  - Bestimme lexikographische Ordnung der Wörter über $\Delta = \{x_1, .., x_n\}$

    $\epsilon < x_1 < \ldots < x_n < x_1x_1 < x_1x_2 < \ldots < x_nx_n < x_1x_1x_1 < \ldots$
  - Zähle entsprechend durch: $w_0$:=$\epsilon$, $w_1$:=$x_1$, .. $w_n$:=$x_n$, $w_{n+1}$:=$x_1x_1$, ...
- **Turingmaschinen sind (bijektiv) numerierbar**
  - Zähle Wörter über $\Delta$ auf und teste, ob sie Turingmaschinen codieren
  - $\boldsymbol{M_i}$ ist die Turingmaschine, deren Codierung an $i$-ter Stelle erscheint
  - Die Nummer $i$ wird auch die **Gödelnummer** von $M_i$ genannt

# Numerierung von TM liefert zwei Kernaxiome

- **Definiere Numerierung berechenbarer Funktionen:**
  - $\varphi_i$ ist die von $M_i$ berechnete (partielle) Funktion auf $\mathbb{N}$
    - $\varphi(i){:=}\varphi_i := r_b^{-1}\circ f_{M_i}\circ r_b$, wobei $r_b{:}\mathbb{N}\to\{0,1\}^*$ Binärcodierung von $\mathbb{N}$
  - $\Phi_i$ ist die zugehörige Schrittzahlfunktion von $M_i$
    - $\Phi(i)(n){:} = \Phi_i(n) := t_{M_i}(r_b(n))$
- **$\varphi{:}\mathbb{N}\longrightarrow\mathcal{R}$ is surjektiv, aber nicht bijektiv**
  - Jede programmierbare Funktion hat einen Index
  - Jede berechenbare Funktion hat unendlich viele Programme
- Axiom 1: **Für alle $i$ gilt domain($\Phi_i$)=domain($\varphi_i$)**
  - Per Konstruktion ist $\Phi_i$ auf den gleichen Eingaben definiert wie $\varphi_i$
- Axiom 2: **$\{\langle i,n,t\rangle \mid \Phi_i(n){=}t\}$ ist entscheidbar**
  - Simuliere Ausführung von $\varphi_i(n)$ für maximal $t$ Schritte
  - Implementierung benutzt Variante der universellen Maschine (s.u.)

# Axiom 3: Die universelle Funktion ist berechenbar




- **Benutze 3 Arbeitsbänder + Hilfsbänder**
  - Programmnummer $i$ und Eingabewert $n$, binär codiert
  - Arbeitsband von $M_i$
  - Aktueller Zustand von $M_i$ (auf Band, da Anzahl der Zustände nicht limitiert)
- **Generiere und simuliere Programm von $M_i$**
  - Generiere das Wort, das $M_i$ über $\Delta$ codiert; schreibe es auf Band 1
  - Kopiere $r_b(n)$ auf Band 2 und schreibe $q_0$ auf Band 3
  - Simuliere Einzelschritte von $M_i$ durch Aufsuchen der Befehle auf Band 1
  - Terminiert $M_i$ (Zustand $q_1$), kopiere die Ausgabe von Band 2 auf Band 1

**$u$ :$\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ mit $u\langle i,n\rangle=\varphi_i(n)$ ist berechenbar** (UTM Theorem)

## Axiom 4: Programme sind effektiv kombinierbar

**Es gibt eine berechenbare totale Funktion $s{:}\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ mit**
**$\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n,i\rangle$ für alle $m,n,i\in\mathbb{N}$** (SMN Theorem)

- **Konstruiere eine Turingmaschine $M$ für $s$:**
  - Auf dem Eingabeband stehe die Codierung einer Zahl $\langle m,n\rangle$
  - Konstruiere auf Hilfsband 1 die Codierung der $m$-ten Turingmaschine $M_m$
  - Konstruiere auf Hilfsband 2 die Codierung einer Maschine $M_{\langle\rangle}$, welche bei Eingabe einer Zahl $i$ den Wert $f_{M_{\langle\rangle}}(i) = \langle n,i\rangle$ berechnet.
  - Konstruiere auf Hilfsband 3 den Code einer Maschine, die bei Eingabe einer Zahl $i$ zunächst $M_{\langle\rangle}$ simuliert und $M_m$ auf das Ergebnis anwendet.
  - Berechne die Gödelnummer der so aus $\langle m,n\rangle$ konstruierten Maschine
- **Setze $s := f_M$**
  - Per Konstruktion ist die Funktion $s$ berechenbar
  - $s$ ist total, weil $M$ für jede Eingabe $\langle m,n\rangle$ ein Ergebnis produziert
  - Es gilt $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = f_{M_m}(f_{M_{\langle\rangle}}(i)) = \varphi_m\langle n,i\rangle$

# Konsequenzen des SMN Theorems

## Programme sind fast beliebig ineinander übersetzbar

- **Für jede berechenbare Funktion $f$ gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h(n)}(i) = f\langle n, i\rangle$ für alle $n, i \in \mathbb{N}$**

  Beweis: wenn $f = \varphi_m$ ist, so wähle $h(n) := s\langle m, n\rangle$

- **Berechenbare Funktionen sind effektiv kombinierbar**

  Es gibt eine berechenbare totale Funktion $h$ mit $\varphi_{h\langle i,j\rangle} = \varphi_i \circ \varphi_j$

  Intuitiv: $h$ berechnet die Gödelnummer der Kombination von $M_i$ und $M_j$

  Beweis: die Funktion $f$ mit $f\langle\langle i, j\rangle, x\rangle := \varphi_i(\varphi_j(x))$ ist berechenbar

  Also gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h\langle i,j\rangle}(x) = f\langle\langle i, j\rangle, x\rangle = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x)$

- **Es gibt berechenbare totale Funktionen $f$, $g$ mit**
  - $\varphi_{f(i)}(n) = \varphi_i(n)+1$ für alle $i, n$
  - $\varphi_{g\langle i,j\rangle}(n) = \varphi_i(n)+\varphi_j(n)$ für alle $i, j, n$

  ⋮

# Berechenbarkeitstheorie braucht nur vier Axiome

## Berechenbare Funktionen sind effektiv numerierbar

**Es gibt Funktionen $\varphi$:$\mathbb{N}\rightarrow\mathcal{R}$ und $\Phi$:$\mathbb{N}\rightarrow\mathcal{R}$ mit**

**1. $\varphi_i$ und $\Phi_i$ haben immer denselben Definitionsbereich**

Intuition: $\varphi_i \hat{=} \varphi(i)$ ist die vom $i$-ten Programm berechnete Funktion

$\Phi_i \hat{=} \Phi(i)$ ist die zu $\varphi_i$ gehörende Rechenzeitfunktion

**2. Rechenzeit ist entscheidbar**

– Man kann für beliebige $i, n, t \in \mathbb{N}$ testen ob $\Phi_i(n) = t$ ist oder nicht

**3. Computer sind universelle Maschinen** (UTM Theorem)

– Eine Maschine kann alle Programme und Daten verarbeiten

– Die Funktion $u$ :$\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ mit $u\langle i, n\rangle = \varphi_i(n)$ ist berechenbar

**4. Programme sind effektiv kombinierbar** (SMN Theorem)

– Die Nummer des entstehenden Programms kann berechnet werden

– Es gibt eine berechenbare totale Funktion $s$ mit $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i\rangle$

# Zentrale Berechenbarkeitskonzepte

- **Berechenbare Funktion** $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ("$f$ ist **(partiell) rekursiv**")
  - Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ (Es gibt ein Programm zur Berechnung von $f$)
  - $f$ heißt **total rekursiv**, wenn $f$ berechenbar und total ist

- **Entscheidbare Menge** $M$ ('$M$ ist **rekursiv**")

  Es gibt ein Programm, das testet, ob ein Element zu $M$ gehört oder nicht
  - Die charakteristische Funktion $\chi_M$ ist berechenbar

$$\boxed{\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

- **Semi-entscheidbare Menge** $M$

  Es gibt ein Programm, das testet, ob ein Element zu $M$ gehört, aber nicht immer anhält
  - Die partielle charakteristische Funktion $\psi_M$ ist berechenbar

$$\boxed{\psi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}}$$

- **Neu: (rekursiv) aufzählbare Menge** $M$

  Es gibt ein Programm, das schrittweise alle Elemente von $M$ generiert
  - $M=\emptyset$ oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion $f$ mit $M = \text{range}(f)$

$$\boxed{\text{range}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \mathbb{N}\ f(i)=n\}}$$

# Anmerkungen zur Aufzählbarkeit

- **Nicht identisch mit Abzählbarkeit**
  - $M$ abzählbar, wenn es eine surjektive Funktion $f$ von $\mathbb{N}$ nach $M$ gibt
  - $M$ aufzählbar, wenn $M$ Bild einer berechenbaren Funktion ist
- **Aufzählungen müssen nicht injektiv sein**
  - Die Funktion $g$ mit $g(n) = \begin{cases} n{+}1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

    zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf
- **Jede Menge hat verschiedene Aufzählungen**
  - $h = \lambda n.2n{+}1$ zählt alle ungeraden Zahlen genau einmal auf
- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**
  - $M = \{x_0, .., x_n\}$ ist Bild von $f$ mit $f(n) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i{\leq}n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - $f$ ist primitiv rekursiv, also berechenbar

# Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen für rekursiv aufzählbare Mengen

**Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent**

1. **$M$ ist aufzählbar**
2. **$M$ = range($f$) für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$**
   – **range($f$)**= $\{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $f$ nicht notwendigerweise total
3. **$M$ ist semi-entscheidbar**
4. **$M$ = domain($f$) für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$**
   – **domain($f$)**= $\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$

**Analog für Mengen über Worten, Zahlentupeln, . . .**

# Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **$M$ aufzählbar $\Rightarrow$ $M$=range($f$) für ein berechenbares $f$**
  - Es sei $M$ aufzählbar
  - Falls $M$=$\emptyset$ dann ist $M$ = range($f_\perp$), wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls $M$ = range($f$) für ein berechenbares, totales $f$ $\surd$
- **$M$=range($f$) für ein berechenbares $f$ $\Rightarrow$ $M$ semi-entscheidbar**
  - Es sei $M$=range($f$) für ein berechenbares, möglicherweise partielles $f$
  - Dann ist $m \in M$ genau dann, wenn $m$=$f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$
  - Für $i \in \mathbb{N}$ mit $f$=$\varphi_i$ ist $\psi_M(m)$ = sign (min$\{\langle n,t\rangle | \Phi_i(n)=t \wedge \varphi_i(n)=m\}$)

    Standardtrick: simultanes Durchzählen von Eingabewerten und Rechenzeitschranken
  - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist $\psi_M$ berechenbar $\surd$
- **$M$ semi-entscheidbar $\Rightarrow$ $M$=domain($f$) für ein berechenbares $f$**
  - Es sei $M$ semi-entscheidbar.
  - Dann ist $\psi_M$ berechenbar und $M$=$\{i \in \mathbb{N} \mid \psi_M(i) = 1\}$ = domain($\psi_M$) $\surd$

# Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **$M$=domain($f$) für ein berechenbares $f$ $\Rightarrow$ $M$ aufzählbar**
  - Es sei $M$ = domain($f$) = $\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares $f$
  - Falls $M=\emptyset$, dann ist $M$ per Definition aufzählbar $\checkmark$
  - Andernfalls gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f=\varphi_i$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$
  - Wir konstruieren eine berechenbare totale Funktion $g$ mit $M$=range($g$)

    Es sei $g\langle n,t\rangle = \begin{cases} n & \text{falls } \Phi_i(n)=t, \\ n_0 & \text{sonst} \end{cases}$

    Standardtrick: Zerlegen der Eingabe mit Umkehrfunktionen der Standardtupelfunktion
  - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist $g$ total und berechenbar
  - $M$=range($g$): Es gilt $n \in M$=domain($\varphi_i$)

    $\Leftrightarrow$ es gibt es eine Rechenzeit $t$ mit $\Phi_i(n)=t$

    $\Leftrightarrow$ $g\langle n,t\rangle = n$

    $\Leftrightarrow$ $n \in$ range($g$) $\checkmark$

# Wichtige entscheidbare und aufzählbare Mengen

- **Sei $f{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}$ berechenbar**
  - **range$(f)$ ist aufzählbar** Charakterisierung #2
  - **domain$(f)$ ist aufzählbar** Charakterisierung #4
  - **graph$(f)$ ist aufzählbar (entscheidbar, wenn $f$ total ist)**

    Bei Eingabe $\langle i, j\rangle$ teste $f(i){=}j$ (hält immer, wenn $f$ total)

- **$\{\langle i, n, t\rangle \mid \Phi_i(n){=}t\}$ ist entscheidbar** Axiom 2
- **$\{\langle i, n, y\rangle \mid \varphi_i(n){=}y\}$ ist aufzählbar**
  - Graph der universellen Funktion
- **$H = \{\langle i, n\rangle \mid n \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist aufzählbar**
  - Definitionsbereich der universellen Funktion (Halteproblem)
- **$S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist aufzählbar**
  - Definitionsbereich von $\lambda i.u\langle i, i\rangle$ (Selbstanwendbarkeitsproblem)

# Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

**$M$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ $M$ und $\overline{M}$ aufzählbar**

$\Rightarrow$ Es sei $M$ entscheidbar. Dann ist $\chi_M{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind $\psi_M$ und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also $M$ und $\overline{M}$ aufzählbar $\surd$

$\Leftarrow$ Seien $M$ und $\overline{M}$ aufzählbar

Falls $M{=}\emptyset$ oder $\overline{M}{=}\emptyset$, so ist $M$ trivialerweise entscheidbar $\surd$

Andernfalls $M$=range($f$) und $\overline{M}$=range($g$) wobei $f$, $g$ total berechenbar

Definiere $h{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \min\{i \mid f(i){=}n \lor g(i){=}n\}$

Dann ist $h$ berechenbar und total, da $n \in M$ oder $n \in \overline{M}$ für jedes $n$ gilt.

Damit ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(h(n)) = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar $\surd$

# Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt in §5.5)
- **Jede endliche Menge ist entscheidbar (und aufzählbar)**
  - Für $M = \{x_1, .., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\chi_M$ ist berechenbar, also ist $M$ entscheidbar ✓
- **$M$ ist aufzählbar g.d.w. es eine entscheidbare Menge $M'$ gibt mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in M'\}$** (Projektionssatz)

  $\Rightarrow$: Falls $M{=}\emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in \emptyset\}$ ✓
  - Andernfalls ist $M{=}\text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales $f$ und $\text{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in \text{graph}(f)\}$ ✓

  $\Leftarrow$: Es sei $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in M'\}$ für ein entscheidbares $M'$
  - Dann ist $\psi_M(y) = \text{sign}\,(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \langle n, y\rangle \in M'\}{+}1)$

    $= \text{sign}\,(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \chi_{M'}\langle n, y\rangle{=}1\}{+}1)$ berechenbar ✓

# ABSCHLUSSEIGENSCHAFTEN AUFZÄHLBARER MENGEN

## Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$: Vereinigung**
  - Seien $M$=range($h$) und $M'$=range($h'$) aufzählbar
  - Definiere $g$ durch $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
  - Dann ist $g$ berechenbar und range($g$) = $M \cup M'$ aufzählbar
- **$M \cap M'$: Durchschnitt**
  - Es ist $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$. Also ist $\psi_{M \cap M'}$ berechenbar

    In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn n $\in M \cap M'$
- **$f(M)$: Bild einer berechenbaren Funktion**
  - Definiere $g$ durch $g(n) = f(h(n))$
  - Dann ist $g$ berechenbar und range($g$) = $f(M)$ aufzählbar
- **$f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren Funktion**
  - Es ist $\psi_{f^{-1}(M)}(n) = \psi_M(f(n))$. Also ist $\psi_{f^{-1}(M)}$ berechenbar.

**Kein Abschluß unter Komplement oder Differenz**

# Abschlusseigenschaften entscheidbarer Mengen

## Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$: Vereinigung**
  – Beweisidee: $\chi_{M \cup M'}(n) = \text{sign}(\chi_M(n) + \chi_{M'}(n))$.
- **$M \cap M'$: Durchschnitt**
  – Beweisidee: $\chi_{M \cap M'}(n) = \chi_M(n) * \chi_{M'}(n)$.
- **$\overline{M}$: Komplement**
  – Beweisidee: $\chi_{\overline{M}}(n) = 1 - \chi_M(n)$.
- **$M$-$M'$: Differenz**
  – Beweisidee: $M\text{-}M' = M \cap \overline{M'}$
- **$f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren totalen Funktion**
  – Beweisidee: $\chi_{f^{-1}(M)}(n) = \chi_M(f(n))$.

**Kein Abschluß unter Bild berechenbarer Funktionen**

# Rückblick elementare Berechenbarkeitstheorie

- **Es gibt 3 Grundkonzepte der Berechenbarkeit**
  - Berechenbare Funktionen, entscheidbare und aufzählbare Mengen
  - Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen

  Alle Konzepte sind beschreibbar durch berechenbare Funktionen auf $\mathbb{N}$
  - Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, $f$, $f^{-1}$
  - Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, , -, $f^{-1}$
- **Alle Theorie stützt sich auf nur vier Gesetze**
  1. Numerierbarkeit von berechenbaren Funktionen und Rechenzeiten
  2. Entscheidbarkeit der Rechenzeit
  3. Berechenbarkeit der universellen Funktion
  4. Effektive Kombinierbarkeit berechenbarer Funktionen

  Jedes Berechenbarkeitsmodell erfüllt diese Axiome

Mehr Details in Vossen & Witt §9 und den dort angegebenen Referenzen