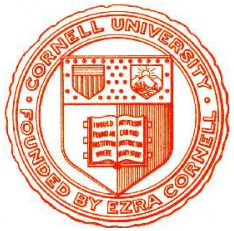
Theoretische Informatik II

Einheit 5.3



Funktionale & Logische Programme

1. Der λ-Kalkül
2. Arithmetische Repräsentierbarkeit
3. Die Churchsche These

Der λ-Kalkül

Grundlage funktionaler Programmiersprachen

Der λ-Kalkül

Grundlage funktionaler Programmiersprachen

- **Einfacher mathematischer Mechanismus**
  - Funktionen werden definiert und angewandt
  - Beschreibung des Funktionsverhaltens wird zum Namen der Funktion
  - Funktionswerte werden ausgerechnet durch Einsetzen von Werten

Der λ-Kalkül

Grundlage funktionaler Programmiersprachen

- **Einfacher mathematischer Mechanismus**
  - Funktionen werden definiert und angewandt
  - Beschreibung des Funktionsverhaltens wird zum Namen der Funktion
  - Funktionswerte werden ausgerechnet durch Einsetzen von Werten
- **Leicht zu verstehende Basiskonzepte**
  1. Definition einer Funktion:

     ```
     f(x) = 2*x+3
     ```

Der λ-Kalkül

Grundlage funktionaler Programmiersprachen

- **Einfacher mathematischer Mechanismus**
  - Funktionen werden definiert und angewandt
  - Beschreibung des Funktionsverhaltens wird zum Namen der Funktion
  - Funktionswerte werden ausgerechnet durch Einsetzen von Werten
- **Leicht zu verstehende Basiskonzepte**

  1. Definition einer Funktion:

     $$\mathsf{f} \mathrel{\hat{=}} \mathsf{x} \mapsto \mathsf{2*x+3}$$

     Name der Funktion irrelevant für Beschreibung des Verhaltens

Der λ-Kalkül

Grundlage funktionaler Programmiersprachen

- **Einfacher mathematischer Mechanismus**
  - Funktionen werden definiert und angewandt
  - Beschreibung des Funktionsverhaltens wird zum Namen der Funktion
  - Funktionswerte werden ausgerechnet durch Einsetzen von Werten
- **Leicht zu verstehende Basiskonzepte**

  1. Definition einer Funktion:

     `f` $\hat{=}$ `\x.2*x+3` Abstraktion von `x`

     Name der Funktion irrelevant für Beschreibung des Verhaltens

Der λ-Kalkül

Grundlage funktionaler Programmiersprachen

- **Einfacher mathematischer Mechanismus**
  - Funktionen werden definiert und angewandt
  - Beschreibung des Funktionsverhaltens wird zum Namen der Funktion
  - Funktionswerte werden ausgerechnet durch Einsetzen von Werten
- **Leicht zu verstehende Basiskonzepte**

  1. Definition einer Funktion:

     `f` $\hat{=}$ `λx.2*x+3` **λ-Abstraktion**

     Name der Funktion irrelevant für Beschreibung des Verhaltens

Der λ-Kalkül

Grundlage funktionaler Programmiersprachen

- **Einfacher mathematischer Mechanismus**
  - Funktionen werden definiert und angewandt
  - Beschreibung des Funktionsverhaltens wird zum Namen der Funktion
  - Funktionswerte werden ausgerechnet durch Einsetzen von Werten
- **Leicht zu verstehende Basiskonzepte**
  1. Definition einer Funktion:

     `f` $\hat{=}$ λ`x.2*x+3` **λ-Abstraktion**

     Name der Funktion irrelevant für Beschreibung des Verhaltens
  2. Anwendung der Funktion (ohne Auswertung):

     `f(4)` $\hat{=}$ $(\lambda$`x.2*x+3)(4)` **Applikation**

Der λ-Kalkül

Grundlage funktionaler Programmiersprachen

- **Einfacher mathematischer Mechanismus**
  - Funktionen werden definiert und angewandt
  - Beschreibung des Funktionsverhaltens wird zum Namen der Funktion
  - Funktionswerte werden ausgerechnet durch Einsetzen von Werten
- **Leicht zu verstehende Basiskonzepte**

  1. Definition einer Funktion:

     $\texttt{f} \mathrel{\hat{=}} \lambda\texttt{x.2*x+3}$ **λ-Abstraktion**

     Name der Funktion irrelevant für Beschreibung des Verhaltens

  2. Anwendung der Funktion (ohne Auswertung):

     $\texttt{f(4)} \mathrel{\hat{=}} (\lambda\texttt{x.2*x+3})\texttt{(4)}$ **Applikation**

  3. Auswertung einer Funktionsanwendung (tatsächliches Ausrechnen):

     $(\lambda\texttt{x.2*x+3})\texttt{(4)} \xrightarrow{\beta} \texttt{2*4+3} \xrightarrow{*} \texttt{11}$ **Reduktion**

λ-Kalkül – Syntax

- **Einfache Programmiersprache: λ-Terme**
  - Variablen x
  - $\lambda x\,.\,t$, wobei x Variable und t λ-Term — **λ-Abstraktion**
    Vorkommen von x in t werden gebunden
  - $f\ t$, wobei t und f λ-Terme — **Applikation**
  - $(\,t\,)$, wobei t λ-Term

λ-Kalkül – Syntax

- **Einfache Programmiersprache: λ-Terme**
  - Variablen x
  - $\lambda x\,.\,t$, wobei x Variable und t λ-Term **λ-Abstraktion**
    Vorkommen von x in t werden gebunden
  - $f\ t$, wobei t und f λ-Terme **Applikation**
  - $(\,t\,)$, wobei t λ-Term
- **Prioritäten und Kurzschreibweisen**
  - Applikation bindet stärker als λ-Abstraktion
  - Applikation ist links-assoziativ: $f\ t_1\ t_2 \mathrel{\hat{=}} (f\ t_1)\ t_2$
  - Notation $f\,(t_1, \ldots, t_n)$ steht für iterierte Applikation $f\ t_1\ \ldots\ t_n$

λ-Kalkül – Syntax

- **Einfache Programmiersprache: λ-Terme**
  - Variablen x
  - $\lambda x\,.\,t$, wobei x Variable und t λ-Term — **λ-Abstraktion**
    Vorkommen von x in t werden gebunden
  - $f\ t$, wobei t und f λ-Terme — **Applikation**
  - (t), wobei t λ-Term
- **Prioritäten und Kurzschreibweisen**
  - Applikation bindet stärker als λ-Abstraktion
  - Applikation ist links-assoziativ: $f\ t_1\ t_2 \mathrel{\hat{=}} (f\ t_1)\ t_2$
  - Notation $f(t_1,..,t_n)$ steht für iterierte Applikation $f\ t_1\ ..\ t_n$
- **Beispiele für λ-Terme**
  - `x` — Symbole sind immer Variablen
  - λ`f.`λ`x.f(x)` — Anwendung einer Funktion
  - λ`f.`λ`g.`λ`x. f g (g x)` — Funktionen höherer Ordnung
  - `x(x)` — Selbstanwendung

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

```
(λn.λf.λx. n f (f x)) (λf.λx.x)
```

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

$$\texttt{(}\lambda\texttt{n.}\lambda\texttt{f.}\lambda\texttt{x. n f (f x)) (}\lambda\texttt{f.}\lambda\texttt{x.x)}$$

$$\longrightarrow \quad \lfloor\texttt{}\lambda\texttt{f.}\lambda\texttt{x. n f (f x)}\rfloor[\texttt{(}\lambda\texttt{f.}\lambda\texttt{x.x)/n}]$$

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

```
      (λn.λf.λx. n f (f x)) (λf.λx.x)
⟶    λf.λx. (λf.λx.x) f (f x)
```

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

```
      (λn.λf.λx. n f (f x)) (λf.λx.x)
⟶    λf.λx. (λf.λx.x) f (f x)
```

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

$$\begin{aligned} & (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.x) \\ \longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x.x)\ f\ (f\ x) \\ \longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ \lfloor(\lambda x.x)\rfloor\ [f/f]\ (f\ x) \end{aligned}$$

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

```
      (λn.λf.λx. n f (f x)) (λf.λx.x)
⟶    λf.λx. (λf.λx.x) f (f x)
⟶    λf.λx. (λx.x) (f x)
```

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

$$\begin{aligned} & (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.x) \\ \longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x.x)\ f\ (f\ x) \\ \longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda x.x)\ (f\ x) \end{aligned}$$

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $t[b/x]$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor \lambda x\,.\,u \rfloor [b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor \lambda x\,.\,u \rfloor [b/y] = \lfloor \lambda z\,.\,u[z/x] \rfloor [b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

$$
\begin{aligned}
& (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x.x)\ f\ (f\ x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda x.x)\ (f\ x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ \lfloor x \rfloor\ [(f\ x)/x]
\end{aligned}
$$

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

$$
\begin{aligned}
& (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x.x)\ f\ (f\ x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda x.x)\ (f\ x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (f\ x)
\end{aligned}
$$

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

$$
\begin{aligned}
& (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x.x)\ f\ (f\ x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda x.x)\ (f\ x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (f\ x)
\end{aligned}
$$

λ-Kalkül – Berechnung durch Auswertung

- **Ersetze Funktionsparameter durch -argumente**
  - **Reduktion** $(\lambda x\,.\,t)(b) \xrightarrow{\beta} t[b/x]$
  - **Substitution** $\boldsymbol{t[b/x]}$: ersetze freie Vorkommen von x in t durch b

    Sonderfälle: $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/x] = \lambda x\,.\,u$ *x ist nicht frei in u*

    $\lfloor\lambda x\,.\,u\rfloor[b/y] = \lfloor\lambda z\,.\,u[z/x]\rfloor[b/y]$ *$y{\neq}x$ frei in u, x frei in b, z neu*

- **Substitution und Reduktion am Beispiel**

$$
\begin{aligned}
& (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x.x)\ f\ (f\ x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda x.x)\ (f\ x) \\
\longrightarrow\quad & \lambda f.\lambda x.\ (f\ x)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$(\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.x) \xrightarrow{3} \lambda f.\lambda x.\ f\ x$$

Vom λ-Kalkül zu echten Programmen

- **λ-Kalkül ist der Basismechanismus**
  - Die Assemblersprache funktionaler Programme
  - Spezialhardware (Lisp-Maschinen) kann λ-Terme direkt auswerten

Vom λ-Kalkül zu echten Programmen

- **λ-Kalkül ist der Basismechanismus**
  - Die Assemblersprache funktionaler Programme
  - Spezialhardware (Lisp-Maschinen) kann λ-Terme direkt auswerten
- **Programm- und Datenstrukturen werden codiert**
  - Berechnung auf λ-Ausdrücken muß Effekte auf Struktur simulieren
  - Nicht anders als in konventionellen Computern
    - Datenstrukturen werden als als Bitketten codiert
    - Programmstrukturen werden in Sprungbefehle übersetzt

Vom λ-Kalkül zu echten Programmen

- **λ-Kalkül ist der Basismechanismus**
  - Die Assemblersprache funktionaler Programme
  - Spezialhardware (Lisp-Maschinen) kann λ-Terme direkt auswerten
- **Programm- und Datenstrukturen werden codiert**
  - Berechnung auf λ-Ausdrücken muß Effekte auf Struktur simulieren
  - Nicht anders als in konventionellen Computern
    - Datenstrukturen werden als als Bitketten codiert
    - Programmstrukturen werden in Sprungbefehle übersetzt
- **Die wichtigsten Strukturen sind leicht codierbar**
  - Boolesche Operationen: T, F, if b then s else t
  - Tupel / Projektionen: (s,t), $pair.1$, $pair.2$, let $(x,y) = pair$ in t
  - Zahlen und arithmetische Operationen
  - Iteration oder Rekursion von Funktionen

Darstellung Boolescher Operatoren im λ-Kalkül

Zwei verschiedene Objekte und ein Test

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{T} & \equiv & \lambda \mathtt{x}.\lambda \mathtt{y}.\mathtt{x} \\ \mathsf{F} & \equiv & \lambda \mathtt{x}.\lambda \mathtt{y}.\mathtt{y} \\ \text{if } b \text{ then } s \text{ else } t & \equiv & b\,s\,t \end{array}$$

Darstellung Boolescher Operatoren im λ-Kalkül

Zwei verschiedene Objekte und ein Test

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{T} & \equiv & \lambda \mathtt{x}.\lambda \mathtt{y}.\mathtt{x} \\ \mathsf{F} & \equiv & \lambda \mathtt{x}.\lambda \mathtt{y}.\mathtt{y} \\ \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ s\ \mathsf{else}\ t & \equiv & b\,s\,t \end{array}$$

Konditional(-simulation) ist invers zu T und F

$$\begin{array}{rcl} & & \mathsf{if}\ \mathsf{T}\ \mathsf{then}\ s\ \mathsf{else}\ t \\ & \equiv & \mathsf{T}\,s\,t \\ & \equiv & (\lambda \mathtt{x}.\lambda \mathtt{y}.\mathtt{x})\,s\,t \\ \longrightarrow & & (\lambda \mathtt{y}.s)\,t \\ \longrightarrow & & s \end{array}$$

Darstellung Boolescher Operatoren im λ-Kalkül

Zwei verschiedene Objekte und ein Test

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{T} & \equiv & \lambda \mathsf{x}.\lambda \mathsf{y}.\mathsf{x} \\
\mathsf{F} & \equiv & \lambda \mathsf{x}.\lambda \mathsf{y}.\mathsf{y} \\
\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ s\ \mathsf{else}\ t & \equiv & b\,s\,t
\end{array}
$$

Konditional(-simulation) ist invers zu T und F

$$
\begin{array}{lcl}
 & & \mathsf{if}\ \mathsf{T}\ \mathsf{then}\ s\ \mathsf{else}\ t \\
 & \equiv & \mathsf{T}\,s\,t \\
 & \equiv & (\lambda \mathsf{x}.\lambda \mathsf{y}.\mathsf{x})\,s\,t \\
 & \longrightarrow & (\lambda \mathsf{y}.s)\,t \\
 & \longrightarrow & s
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
 & & \mathsf{if}\ \mathsf{F}\ \mathsf{then}\ s\ \mathsf{else}\ t \\
 & \equiv & \mathsf{F}\,s\,t \\
 & \equiv & (\lambda \mathsf{x}.\lambda \mathsf{y}.\mathsf{y})\,s\,t \\
 & \longrightarrow & (\lambda \mathsf{y}.\mathsf{y})\,t \\
 & \longrightarrow & t
\end{array}
$$

Paare: Datenkapselung und Komponentenzugriff

$$
\begin{array}{lcl}
(u\,,v) & \equiv & \lambda\texttt{pair.}\ \texttt{pair}\ u\ v \\
pair.1 & \equiv & pair\ \ (\lambda\texttt{x.}\lambda\texttt{y.x}) \\
pair.2 & \equiv & pair\ \ (\lambda\texttt{x.}\lambda\texttt{y.y}) \\
\texttt{let}\ \ (x\,,y) = pair\ \texttt{in}\ \ t & \equiv & pair\ \ (\lambda x.\lambda y.t)
\end{array}
$$

Paare: Datenkapselung und Komponentenzugriff

$$
\begin{array}{lcl}
(u,v) & \equiv & \lambda \texttt{pair}.\ \texttt{pair}\ u\ v \\
pair.1 & \equiv & pair\ \ (\lambda \texttt{x}.\lambda \texttt{y}.\texttt{x}) \\
pair.2 & \equiv & pair\ \ (\lambda \texttt{x}.\lambda \texttt{y}.\texttt{y}) \\
\textsf{let}\ \ (x,y) = pair\ \textsf{in}\ \ t & \equiv & pair\ \ (\lambda x.\lambda y.t)
\end{array}
$$

Analyseoperator ist invers zur Paarbildung

$$
\begin{array}{rl}
 & \textsf{let}\ \ (x,y) = (u,v)\ \textsf{in}\ \ t \\
\equiv & (u,v)(\lambda x.\lambda y.t) \\
\equiv & (\lambda \texttt{pair}.\ \texttt{pair}\ u\ v)(\lambda x.\lambda y.t) \\
\longrightarrow & (\lambda x.\lambda y.t)\ u\ v \\
\longrightarrow & (\lambda y.t[u/x])\ v \\
\longrightarrow & t[u,v/x,y]
\end{array}
$$

Simulation arithmetischer Operationen

- **Darstellung natürlicher Zahlen durch iterierte Terme**
  - Semantisch: wiederholte Anwendung von Funktionen
  - Repräsentiere die Zahl n durch den Term $\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\underbrace{\mathtt{f}\,(\mathtt{f}\,..\,(\mathtt{f}\,\mathtt{x})\,..)}_{n\text{-}mal}$
  - Notation: $\overline{\boldsymbol{n}} \equiv \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\,\mathtt{f}^n\,\mathtt{x}$
  - Bezeichnung: **Church Numerals**

Simulation arithmetischer Operationen

- **Darstellung natürlicher Zahlen durch iterierte Terme**
  - Semantisch: wiederholte Anwendung von Funktionen
  - Repräsentiere die Zahl n durch den Term $\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\underbrace{\mathtt{f}\,(\mathtt{f}\,..\,(\mathtt{f}\,\mathtt{x})\,..)}_{n\text{-}mal}$
  - Notation: $\overline{n} \equiv \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\,\mathtt{f}^n\,\mathtt{x}$
  - Bezeichnung: **Church Numerals**
- $f{:}\mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ **λ-berechenbar:**
  - Es gibt einen λ-Term t mit der Eigenschaft

$$f(x_1,..,x_n) = m \;\Leftrightarrow\; t\;\overline{x_1}\,..\,\overline{x_n} = \overline{m}$$

Simulation arithmetischer Operationen

- **Darstellung natürlicher Zahlen durch iterierte Terme**
  - Semantisch: wiederholte Anwendung von Funktionen
  - Repräsentiere die Zahl n durch den Term $\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\underbrace{\mathtt{f\,(f\,..\,(f\,x)\,..)}}_{n\text{-}mal}$
  - Notation: $\overline{n} \equiv \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\,\mathtt{f}^n\,\mathtt{x}$
  - Bezeichnung: **Church Numerals**
- **f:$\mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ λ-berechenbar:**
  - Es gibt einen λ-Term t mit der Eigenschaft

$$f(x_1,..,x_n) = m \;\Leftrightarrow\; t\;\overline{x_1}\,..\,\overline{x_n} = \overline{m}$$

- **Operationen müssen Termvielfachheit berechnen**
  - Simulation einer Funktion auf Darstellung von Zahlen muß Darstellung des Funktionsergebnisses liefern
  - z.B. add $\overline{m}$ $\overline{n}$ muß als Wert immer den Term $\overline{m+n}$ ergeben

Programmierung im λ-Kalkül

- **Nachfolgerfunktion:** $\mathtt{s} \equiv \lambda \mathtt{n}.\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{n}\ \mathtt{f}\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x})$

Programmierung im λ-Kalkül

- **Nachfolgerfunktion:** $\mathtt{s} \equiv \lambda\mathtt{n}.\lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{n\ f\ (f\ x)}$
  - Zeige: Der Wert von $\mathtt{s}\ \overline{n}$ ist der Term $\overline{n+1}$

$$
\begin{aligned}
\mathtt{s}\ \overline{n} \quad &\equiv \quad (\lambda\mathtt{n}.\lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{n\ f\ (f\ x)})\ (\lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\,\mathtt{x}) \\
&\longrightarrow \lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ (\lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\,\mathtt{x})\ \mathtt{f}\ (\mathtt{f\ x}) \\
&\longrightarrow \lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ (\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\,\mathtt{x})\ (\mathtt{f\ x}) \\
&\longrightarrow \lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\ (\mathtt{f\ x}) \\
&\longrightarrow \lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{f}^{n+1}\ \mathtt{x} \qquad \equiv \quad \overline{n+1}
\end{aligned}
$$

Programmierung im λ-Kalkül

- **Nachfolgerfunktion:** $\mathtt{s} \equiv \lambda\mathtt{n}.\lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{n\ f\ (f\ x)}$
  - Zeige: Der Wert von $\mathtt{s}\ \overline{n}$ ist der Term $\overline{n+1}$

$$
\begin{aligned}
\mathtt{s}\ \overline{n} \quad &\equiv \quad (\lambda\mathtt{n}.\lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{n\ f\ (f\ x)})\ (\lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\,\mathtt{x}) \\
&\longrightarrow \lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ (\lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\,\mathtt{x})\ \mathtt{f}\ (\mathtt{f\ x}) \\
&\longrightarrow \lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ (\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\,\mathtt{x})\ (\mathtt{f\ x}) \\
&\longrightarrow \lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\ (\mathtt{f\ x}) \\
&\longrightarrow \lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{f}^{n+1}\ \mathtt{x} \qquad \equiv \quad \overline{n+1}
\end{aligned}
$$

- **Addition:** $\mathtt{add} \equiv \lambda\mathtt{m}.\lambda\mathtt{n}.\lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{m\ f\ (n\ f\ x)}$

Programmierung im λ-Kalkül

- **Nachfolgerfunktion:** $\mathtt{s} \equiv \lambda \mathtt{n}.\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{n}\ \mathtt{f}\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x})$
  - Zeige: Der Wert von $\mathtt{s}\ \overline{n}$ ist der Term $\overline{n+1}$

$$
\begin{aligned}
\mathtt{s}\ \overline{n} \quad &\equiv \quad (\lambda \mathtt{n}.\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{n}\ \mathtt{f}\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x}))\ (\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\ \mathtt{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ (\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\ \mathtt{x})\ \mathtt{f}\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ (\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\ \mathtt{x})\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{f}^{n+1}\ \mathtt{x} \qquad \equiv \quad \overline{n+1}
\end{aligned}
$$

- **Addition:** $\mathtt{add} \equiv \lambda \mathtt{m}.\lambda \mathtt{n}.\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{m}\ \mathtt{f}\ (\mathtt{n}\ \mathtt{f}\ \mathtt{x})$
- **Multiplikation:** $\mathtt{mul} \equiv \lambda \mathtt{m}.\lambda \mathtt{n}.\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{m}\ (\mathtt{n}\ \mathtt{f})\ \mathtt{x}$

Programmierung im λ-Kalkül

- **Nachfolgerfunktion:** $\mathsf{s} \equiv \lambda \mathsf{n}.\lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{n}\ \mathsf{f}\ (\mathsf{f}\ \mathsf{x})$
  - Zeige: Der Wert von $\mathsf{s}\ \overline{n}$ ist der Term $\overline{n+1}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{s}\ \overline{n} \quad &\equiv \quad (\lambda \mathsf{n}.\lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{n}\ \mathsf{f}\ (\mathsf{f}\ \mathsf{x}))\ (\lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{f}^n\ \mathsf{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ (\lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{f}^n\ \mathsf{x})\ \mathsf{f}\ (\mathsf{f}\ \mathsf{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ (\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{f}^n\ \mathsf{x})\ (\mathsf{f}\ \mathsf{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{f}^n\ (\mathsf{f}\ \mathsf{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{f}^{n+1}\ \mathsf{x} \qquad \equiv \quad \overline{n+1}
\end{aligned}
$$

- **Addition:** $\mathsf{add} \equiv \lambda \mathsf{m}.\lambda \mathsf{n}.\lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{m}\ \mathsf{f}\ (\mathsf{n}\ \mathsf{f}\ \mathsf{x})$
- **Multiplikation:** $\mathsf{mul} \equiv \lambda \mathsf{m}.\lambda \mathsf{n}.\lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{m}\ (\mathsf{n}\ \mathsf{f})\ \mathsf{x}$
- **Test auf Null:** $\mathsf{zero} \equiv \lambda \mathsf{n}.\ \mathsf{n}\ (\lambda \mathsf{n}.\mathsf{F})\ \mathsf{T}$

Programmierung im λ-Kalkül

- **Nachfolgerfunktion:** $\mathsf{s} \equiv \lambda \mathtt{n}.\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{n}\ \mathtt{f}\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x})$
  - Zeige: Der Wert von $\mathsf{s}\ \overline{n}$ ist der Term $\overline{n+1}$

$$\begin{aligned}
\mathsf{s}\ \overline{n} \quad &\equiv \quad (\lambda \mathtt{n}.\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{n}\ \mathtt{f}\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x}))\ (\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\ \mathtt{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ (\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\ \mathtt{x})\ \mathtt{f}\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ (\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\ \mathtt{x})\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{f}^n\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x}) \\
&\longrightarrow \lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{f}^{n+1}\ \mathtt{x} \qquad \equiv \quad \overline{n+1}
\end{aligned}$$

- **Addition:** $\mathsf{add} \equiv \lambda \mathtt{m}.\lambda \mathtt{n}.\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{m}\ \mathtt{f}\ (\mathtt{n}\ \mathtt{f}\ \mathtt{x})$
- **Multiplikation:** $\mathsf{mul} \equiv \lambda \mathtt{m}.\lambda \mathtt{n}.\lambda \mathtt{f}.\lambda \mathtt{x}.\ \mathtt{m}\ (\mathtt{n}\ \mathtt{f})\ \mathtt{x}$
- **Test auf Null:** $\mathsf{zero} \equiv \lambda \mathtt{n}.\ \mathtt{n}\ (\lambda \mathtt{n}.\mathtt{F})\ \mathtt{T}$
- **Vorgängerfunktion:**

$\mathsf{p} \equiv \lambda \mathtt{n}.(\mathtt{n}\,(\lambda \mathtt{fx}.(\mathtt{s}, \text{let } (\mathtt{f},\mathtt{x}) = \mathtt{fx} \text{ in } \mathtt{f}\ \mathtt{x}))(\lambda \mathtt{z}.\overline{\mathtt{0}}, \overline{\mathtt{0}})).2$

Programmierung rekursiver Funktionen

- **Wende Fixpunktkombinator auf Funktionskörper an**
  - Fixpunktkombinator: λ-Term R mit Eigenschaft $R\,t = t\,(R\,t)$ für alle t

Programmierung rekursiver Funktionen

- **Wende Fixpunktkombinator auf Funktionskörper an**
  - Fixpunktkombinator: λ-Term R mit Eigenschaft $R\,t = t\,(R\,t)$ für alle t
  - Definiert man f durch $F \equiv R\,(\lambda f\,.\,\lambda x\,.\,t[f,x])$, wobei im Programmkörper t sowohl f als auch x vorkommen können, dann gilt

    $$\boldsymbol{F\,x} = (\lambda f\,.\,\lambda x\,.\,t[f,x])\;F\;x \xrightarrow{*} \boldsymbol{t[F,x]}$$

  - Kurzschreibweise: $F \equiv$ letrec $f\,(x) = t$ $(\equiv R(\lambda f\,.\,\lambda x\,.\,t))$

Programmierung rekursiver Funktionen

- **Wende Fixpunktkombinator auf Funktionskörper an**
  - Fixpunktkombinator: λ-Term R mit Eigenschaft $R\,t = t\,(R\,t)$ für alle t
  - Definiert man f durch $F \equiv R\,(\lambda f.\lambda x.t[f,x])$, wobei im Programmkörper t sowohl f als auch x vorkommen können, dann gilt

    $$\boldsymbol{F\,x} = (\lambda f.\lambda x.t[f,x])\;F\;x \xrightarrow{*} \boldsymbol{t[F,x]}$$

  - Kurzschreibweise: $F \equiv \text{letrec } f(x) = t \;\; (\equiv R(\lambda f.\lambda x.t))$

- **Y-Kombinator:** $\mathsf{Y} \equiv \lambda \mathtt{f}.(\lambda \mathtt{x}.\mathtt{f}(\mathtt{x}\,\mathtt{x}))(\lambda \mathtt{x}.\mathtt{f}(\mathtt{x}\,\mathtt{x}))$
  - Bekanntester Fixpunktkombinator

$$\begin{aligned}
\mathsf{Y}\;t &\equiv (\lambda \mathtt{f}.(\lambda \mathtt{x}.\mathtt{f}(\mathtt{x}\,\mathtt{x}))(\lambda \mathtt{x}.\mathtt{f}(\mathtt{x}\,\mathtt{x})))\;t \\
&\longrightarrow (\lambda \mathtt{x}.t(\mathtt{x}\,\mathtt{x}))\;(\lambda \mathtt{x}.t(\mathtt{x}\,\mathtt{x})) \\
&\longrightarrow t\;((\lambda \mathtt{x}.t(\mathtt{x}\,\mathtt{x}))\;(\lambda \mathtt{x}.t(\mathtt{x}\,\mathtt{x})))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t\;(\mathsf{Y}\;t) &\equiv t\;((\lambda \mathtt{f}.(\lambda \mathtt{x}.\mathtt{f}(\mathtt{x}\,\mathtt{x}))(\lambda \mathtt{x}.\mathtt{f}(\mathtt{x}\,\mathtt{x})))\;t) \\
&\longrightarrow t\;((\lambda \mathtt{x}.t(\mathtt{x}\,\mathtt{x}))\;(\lambda \mathtt{x}.t(\mathtt{x}\,\mathtt{x})))
\end{aligned}$$

Der λ-Kalkül ist Turing-mächtig

Alle μ-rekursiven Funktionen sind λ-berechenbar

Der λ-Kalkül ist Turing-mächtig

Alle μ-rekursiven Funktionen sind λ-berechenbar

- **Nachfolgerfunktion s:** $\mathtt{s} \equiv \lambda\mathtt{n}.\lambda\mathtt{f}.\lambda\mathtt{x}.\ \mathtt{n\ f\ (f\ x)}$

Der λ-Kalkül ist Turing-mächtig

Alle μ-rekursiven Funktionen sind λ-berechenbar

- **Nachfolgerfunktion s:** $\mathsf{s} \equiv \lambda\mathsf{n}.\lambda\mathsf{f}.\lambda\mathsf{x}.\ \mathsf{n}\ \mathsf{f}\ (\mathsf{f}\ \mathsf{x})$
- **Projektionsfunktionen pr^n_m:** $\mathsf{pr}^n_m \equiv \lambda\mathsf{x}_1..\lambda\mathsf{x}_n.\ \mathsf{x}_m$

Der λ-Kalkül ist Turing-mächtig

Alle μ-rekursiven Funktionen sind λ-berechenbar

- **Nachfolgerfunktion s:** $\mathsf{s} \equiv \lambda \mathsf{n}.\lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{n}\ \mathsf{f}\ (\mathsf{f}\ \mathsf{x})$
- **Projektionsfunktionen pr^n_m:** $\mathsf{pr}^n_m \equiv \lambda \mathsf{x}_1 . . \lambda \mathsf{x}_n .\ \mathsf{x}_m$
- **Konstantenfunktion c^n_m:** $\mathsf{c}^n_m \equiv \lambda \mathsf{x}_1 . . \lambda \mathsf{x}_n .\ \overline{\mathsf{m}}$

Der λ-Kalkül ist Turing-mächtig

Alle μ-rekursiven Funktionen sind λ-berechenbar

- **Nachfolgerfunktion s:** $\mathsf{s} \equiv \lambda \mathsf{n}.\lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{n}\ \mathsf{f}\ (\mathsf{f}\ \mathsf{x})$
- **Projektionsfunktionen pr_m^n:** $\mathsf{pr}_m^n \equiv \lambda \mathsf{x}_1 .. \lambda \mathsf{x}_n .\ \mathsf{x}_m$
- **Konstantenfunktion c_m^n:** $\mathsf{c}_m^n \equiv \lambda \mathsf{x}_1 .. \lambda \mathsf{x}_n .\ \overline{\mathsf{m}}$
- **Komposition $f \circ (g_1, .., g_n)$:**
  $\circ \equiv \lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{g}_1 .. \lambda \mathsf{g}_n .\ \lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{f}\,(\mathsf{g}_1\,\mathsf{x})\,..\,(\mathsf{g}_n\,\mathsf{x})$

Der λ-Kalkül ist Turing-mächtig

Alle μ-rekursiven Funktionen sind λ-berechenbar

- **Nachfolgerfunktion s:** $\mathsf{s} \equiv \lambda \mathsf{n}.\lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{n}\ \mathsf{f}\ (\mathsf{f}\ \mathsf{x})$
- **Projektionsfunktionen pr^n_m:** $\mathsf{pr}^n_m \equiv \lambda \mathsf{x}_1 . . \lambda \mathsf{x}_n .\ \mathsf{x}_m$
- **Konstantenfunktion c^n_m:** $\mathsf{c}^n_m \equiv \lambda \mathsf{x}_1 . . \lambda \mathsf{x}_n .\ \overline{\mathsf{m}}$
- **Komposition $f \circ (g_1, .., g_n)$:**

  $\circ \equiv \lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{g}_1 . . \lambda \mathsf{g}_n .\ \lambda \mathsf{x}.\ \mathsf{f}\ (\mathsf{g}_1\ \mathsf{x})\ .\ .\ (\mathsf{g}_n\ \mathsf{x})$
- **Primitive Rekursion $Pr[f, g]$:**

  $\mathsf{PR} \equiv \lambda \mathsf{f}.\lambda \mathsf{g}.$ letrec $\mathsf{h}\,(\mathsf{x}) = \lambda \mathsf{y}.$ if zero y then f x else g x (p y) (h x (p y))

Der λ-Kalkül ist Turing-mächtig

Alle μ-rekursiven Funktionen sind λ-berechenbar

- **Nachfolgerfunktion s:** $\mathsf{s} \equiv \lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\ f\ (f\ x)$
- **Projektionsfunktionen pr^n_m:** $\mathsf{pr}^n_m \equiv \lambda x_1..\lambda x_n.\ x_m$
- **Konstantenfunktion c^n_m:** $\mathsf{c}^n_m \equiv \lambda x_1..\lambda x_n.\ \overline{m}$
- **Komposition $f \circ (g_1, .., g_n)$:**
  $\circ \equiv \lambda f.\lambda g_1..\lambda g_n.\ \lambda x.\ f\ (g_1\ x)..(g_n\ x)$
- **Primitive Rekursion $Pr[f, g]$:**
  $\mathsf{PR} \equiv \lambda f.\lambda g.$ letrec $h(x) = \lambda y.$ if zero y then $f\ x$ else $g\ x\ (p\ y)\ (h\ x\ (p\ y))$
- **Minimierung $\mu[f]$:**
  $\mathsf{Mu} \equiv \lambda f.\lambda x.$ (letrec $\mathtt{min}(y) =$ if zero$(f\ x\ y)$ then y else $\mathtt{min}\ (s\ y))\ \overline{0}$

Rechtfertigung logischer Programmiersprachen

Rechtfertigung logischer Programmiersprachen

- **Spezifikation von Funktionen in logischem Kalkül**
  - Formeln repräsentieren Ein-/Ausgabeverhalten von Funktionen
  - Repräsentation muß eindeutig sein (nur eine Ausgabe pro Eingabe)
  - Eindeutigkeit muß ausschließlich aus logischen Axiomen beweisbar sein

Rechtfertigung logischer Programmiersprachen

- **Spezifikation von Funktionen in logischem Kalkül**
  - Formeln repräsentieren Ein-/Ausgabeverhalten von Funktionen
  - Repräsentation muß eindeutig sein (nur eine Ausgabe pro Eingabe)
  - Eindeutigkeit muß ausschließlich aus logischen Axiomen beweisbar sein
- **Zentraler Begriff: Gültigkeit in einer Theorie**
  - Logische **Theorie T** gegeben durch formale Sprache und Axiome
  - Formel F ist gültig in T ($\models_T F$), wenn F logisch aus den Axiomen folgt

Rechtfertigung logischer Programmiersprachen

- **Spezifikation von Funktionen in logischem Kalkül**
  - Formeln repräsentieren Ein-/Ausgabeverhalten von Funktionen
  - Repräsentation muß eindeutig sein (nur eine Ausgabe pro Eingabe)
  - Eindeutigkeit muß ausschließlich aus logischen Axiomen beweisbar sein
- **Zentraler Begriff: Gültigkeit in einer Theorie**
  - Logische **Theorie T** gegeben durch formale Sprache und Axiome
  - Formel F ist gültig in T ($\models_T F$), wenn F logisch aus den Axiomen folgt
- **Berechenbarkeitsbegriff: $f{:}\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ repräsentierbar in T**
  - Es gibt eine Formel F mit $f(i_1,..,i_k)=j$ g.d.w. $\models_T F(\overline{i_1},..,\overline{i_k},\overline{j})$, d.h. in der Theorie T ist beweisbar, ob f einen bestimmten Wert annimmt
  - $\overline{n}$ ist ein Term der formalen Sprache, der die Zahl n codiert

Die arithmetische Theorie Q

- **Formale Sprache**
  - Sprache der Prädikatenlogik (mit Gleichheit)
  - Konstantensymbol $\overline{0}$
  - Einstelliges Funktionssymbol s
  - Zweistellige Funktionssymbole $+$ und $*$

Die arithmetische Theorie $\mathcal{Q}$

- **Formale Sprache**
  - Sprache der Prädikatenlogik (mit Gleichheit)
  - Konstantensymbol $\overline{0}$
  - Einstelliges Funktionssymbol s
  - Zweistellige Funktionssymbole $+$ und $*$
- **Semantik: Logik + 7 Axiome** (ohne Induktion!)

Q_1: $\forall x, y.\ \mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \Rightarrow x = y$

Q_2: $\forall x.\ \mathsf{s}(x) \neq \overline{0}$

Q_3: $\forall x.\ x \neq \overline{0} \Rightarrow \exists y. x = \mathsf{s}(y)$

Q_4: $\forall x.\ x + \overline{0} = x$

Q_5: $\forall x, y.\ x + \mathsf{s}(y) = \mathsf{s}(x + y)$

Q_6: $\forall x.\ x * \overline{0} = \overline{0}$

Q_7: $\forall x, y. x * \mathsf{s}(y) = (x * y) + x$

Die arithmetische Theorie $\mathcal{Q}$

- **Formale Sprache**
  - Sprache der Prädikatenlogik (mit Gleichheit)
  - Konstantensymbol $\overline{0}$
  - Einstelliges Funktionssymbol s
  - Zweistellige Funktionssymbole $+$ und $*$
- **Semantik: Logik + 7 Axiome** (ohne Induktion!)

Q_1: $\forall x, y.\ \mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \Rightarrow x = y$

Q_2: $\forall x.\ \mathsf{s}(x) \neq \overline{0}$

Q_3: $\forall x.\ x \neq \overline{0} \Rightarrow \exists y. x = \mathsf{s}(y)$

Q_4: $\forall x.\ x + \overline{0} = x$

Q_5: $\forall x, y.\ x + \mathsf{s}(y) = \mathsf{s}(x + y)$

Q_6: $\forall x.\ x * \overline{0} = \overline{0}$

Q_7: $\forall x, y. x * \mathsf{s}(y) = (x * y) + x$

- **Axiome gelten auch für Nichtstandardzahlen**
  - Es sind auch andere Interpretationen der Symbole s, $+$, $*$ möglich
    Definiere Operationen s, $+$, $*$ auf $\mathbb{N} \cup \{\infty, \infty'\}$
    Kommutativität, Assoziativität müssen auf $\mathbb{N} \cup \{\infty, \infty'\}$ nicht gelten

Dennoch kann man alle berechenbaren Funktionen in $\mathcal{Q}$ repräsentieren

Repräsentierbarkeit in $\mathcal{Q}$

- $f{:}\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ **arithmetisch repräsentierbar**
  - f ist repräsentierbar in $\mathcal{Q}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ codiert als $\overline{n} \equiv \underbrace{\mathsf{s}(\ldots(\mathsf{s}(\overline{0}))\ldots)}_{n-mal}$

Repräsentierbarkeit in $\mathcal{Q}$

- **$f{:}\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ arithmetisch repräsentierbar**
  - f ist repräsentierbar in $\mathcal{Q}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ codiert als $\overline{n} \equiv \underbrace{\mathsf{s}(\ldots(\mathsf{s}(\overline{0}))\ldots)}_{n-mal}$
- **Addition ist arithmetisch repräsentierbar**
  - Bestimme 3-stellige Formel ADD mit $i{+}j{=}k$ gdw. $\models_{\mathcal{Q}} \mathsf{ADD}(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$

    Einfach, da + Teil der Sprache ist: $\mathsf{ADD}(x_1, x_2, y) \equiv y{=}x_1{+}x_2$

Repräsentierbarkeit in $\mathcal{Q}$

- **$f{:}\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ arithmetisch repräsentierbar**
  - f ist repräsentierbar in $\mathcal{Q}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ codiert als $\overline{n} \equiv \underbrace{\mathsf{s}(\ldots(\mathsf{s}(\overline{0}))\ldots)}_{n-mal}$
- **Addition ist arithmetisch repräsentierbar**
  - Bestimme 3-stellige Formel ADD mit $i{+}j{=}k$ gdw. $\models_{\mathcal{Q}} \mathsf{ADD}(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$

    Einfach, da + Teil der Sprache ist: $\mathsf{ADD}(x_1,x_2,y) \equiv y{=}x_1{+}x_2$

  Korrektheit der Repräsentation

  - Zeige: für alle $i,j,k \in \mathbb{N}$ mit $i{+}j{=}k$ gilt $\models_{\mathcal{Q}} \overline{k}{=}\overline{i}{+}\overline{j}$ $(\hat{=} \mathsf{ADD}(\overline{i},\overline{j},\overline{k}))$

    (Beweis für $i{+}j{\neq}k$ impliziert $\models_{\mathcal{Q}} \overline{k}{\neq}\overline{i}{+}\overline{j}$ ist analog)

  Sei i beliebig, aber fest. Wir führen den Beweis durch Induktion über j:

Repräsentierbarkeit in $\mathcal{Q}$

- **$f{:}\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ arithmetisch repräsentierbar**
  - f ist repräsentierbar in $\mathcal{Q}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ codiert als $\overline{n} \equiv \underbrace{\mathsf{s}(\ldots(\mathsf{s}(\overline{0}))\ldots)}_{n-mal}$
- **Addition ist arithmetisch repräsentierbar**
  - Bestimme 3-stellige Formel ADD mit $i{+}j{=}k$ gdw. $\models_{\mathcal{Q}} \mathsf{ADD}(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$
    Einfach, da + Teil der Sprache ist: $\mathsf{ADD}(x_1,x_2,y) \equiv y{=}x_1{+}x_2$

Korrektheit der Repräsentation

- Zeige: für alle $i,j,k \in \mathbb{N}$ mit $i{+}j{=}k$ gilt $\models_{\mathcal{Q}} \overline{k}{=}\overline{i}{+}\overline{j}$ $(\hat{=}\, \mathsf{ADD}(\overline{i},\overline{j},\overline{k}))$
  (Beweis für $i{+}j{\neq}k$ impliziert $\models_{\mathcal{Q}} \overline{k}{\neq}\overline{i}{+}\overline{j}$ ist analog)

Sei i beliebig, aber fest. Wir führen den Beweis durch Induktion über j:

- Für $j = 0$ folgt $i{=}k$, also $\overline{i}{=}\overline{k}$ und über Axiom Q_4: $\models_{\mathcal{Q}} \overline{i}{+}\overline{0} = \overline{i}$
- Es gelte $\models_{\mathcal{Q}} \overline{n}{=}\overline{i}{+}\overline{j}$ für alle n und $j{=}m \in \mathbb{N}$ mit $i{+}j{=}n$

Repräsentierbarkeit in $\mathcal{Q}$

- **$f{:}\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ arithmetisch repräsentierbar**
  - f ist repräsentierbar in $\mathcal{Q}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ codiert als $\overline{n} \equiv \underbrace{\mathsf{s}(\ldots(\mathsf{s}(\overline{0}))\ldots)}_{n-mal}$
- **Addition ist arithmetisch repräsentierbar**
  - Bestimme 3-stellige Formel ADD mit $i{+}j{=}k$ gdw. $\models_{\mathcal{Q}} \mathsf{ADD}(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$

    Einfach, da + Teil der Sprache ist: $\mathsf{ADD}(x_1,x_2,y) \equiv y{=}x_1{+}x_2$

Korrektheit der Repräsentation

- Zeige: für alle $i,j,k \in \mathbb{N}$ mit $i{+}j{=}k$ gilt $\models_{\mathcal{Q}} \overline{k}{=}\overline{i}{+}\overline{j}$ $(\hat{=}\, \mathsf{ADD}(\overline{i},\overline{j},\overline{k}))$

  (Beweis für $i{+}j{\neq}k$ impliziert $\models_{\mathcal{Q}} \overline{k}{\neq}\overline{i}{+}\overline{j}$ ist analog)

Sei i beliebig, aber fest. Wir führen den Beweis durch Induktion über j:

- Für $j = 0$ folgt $i{=}k$, also $\overline{i}{=}\overline{k}$ und über Axiom Q_4: $\models_{\mathcal{Q}} \overline{i}{+}\overline{0}{=}\overline{i}$
- Es gelte $\models_{\mathcal{Q}} \overline{n}{=}\overline{i}{+}\overline{j}$ für alle n und $j{=}m \in \mathbb{N}$ mit $i{+}j{=}n$
- Es sei $j{=}m{+}1$, also $\overline{j}{=}\mathsf{s}(\overline{m})$ und es gelte $i{+}j{=}k$.

  Dann gilt $k = i{+}m{+}1 = n{+}1$ und $\overline{k}{=}\mathsf{s}(\overline{n})$.

  Mit Axiom Q_5 folgt $\models_{\mathcal{Q}} \overline{i}{+}\overline{j} = \overline{i}{+}\mathsf{s}(\overline{m}) = \mathsf{s}(\overline{i}{+}\overline{m}) = \mathsf{s}(\overline{n}) = \overline{k}$

Wichtige repräsentierbare Funktionen

- **Multiplikation** $\mathsf{MUL}(x_1, x_2, y) \equiv y{=}x_1{*}x_2$

Wichtige repräsentierbare Funktionen

- **Multiplikation** $\mathsf{MUL}(x_1, x_2, y) \equiv y\mathtt{=}x_1\mathtt{*}x_2$
- **Vergleich** $\leq$ *(Hilfsprädikat für Funktionsbeschreibungen)* $\mathsf{LE}(x, y) \equiv \exists \mathtt{z}\,.\, x\mathtt{+}\mathtt{z}\mathtt{=}y$

  $<$ $\mathsf{LT}(x, y) \equiv \mathsf{LE}(\mathsf{s}(x), y)$

Wichtige repräsentierbare Funktionen

- **Multiplikation** $\mathsf{MUL}(x_1, x_2, y) \equiv y\mathtt{=}x_1\mathtt{*}x_2$
- **Vergleich** $\leq$ *(Hilfsprädikat für Funktionsbeschreibungen)* $\mathsf{LE}(x, y) \equiv \exists \mathtt{z}\,.\, x\mathtt{+}\mathtt{z}\mathtt{=}y$

  $<$ $\mathsf{LT}(x, y) \equiv \mathsf{LE}(\mathtt{s}(x), y)$
- **Subtraktion** $\mathsf{SUB}(x_1, x_2, y) \equiv x_1\mathtt{=}x_2\mathtt{+}y \vee (\mathsf{LE}(x_1, x_2) \wedge y\mathtt{=}\overline{\mathtt{0}})$

Wichtige repräsentierbare Funktionen

- **Multiplikation** $\mathtt{MUL}(x_1, x_2, y) \equiv y\mathtt{=}x_1\mathtt{*}x_2$
- **Vergleich** $\leq$ *(Hilfsprädikat für Funktionsbeschreibungen)* $\mathtt{LE}(x, y) \equiv \exists \mathtt{z}.\, x\mathtt{+z=}y$

  $<$ $\mathtt{LT}(x, y) \equiv \mathtt{LE}(\mathtt{s}(x), y)$
- **Subtraktion** $\mathtt{SUB}(x_1, x_2, y) \equiv x_1\mathtt{=}x_2\mathtt{+}y \vee (\mathtt{LE}(x_1, x_2) \wedge y\mathtt{=}\overline{\mathtt{0}})$
- **Division** $\mathtt{DIV}(x_1, x_2, y) \equiv \exists \mathtt{z}.\, \mathtt{LT(z,}x_2\mathtt{)} \wedge x_2\mathtt{*}y\mathtt{+z=}x_1$

  Divisionsrest/Modulo

  $\mathtt{MOD}(x_1, x_2, y) \equiv \mathtt{LT(}y\mathtt{,}x_2\mathtt{)} \wedge \exists \mathtt{z}.\, x_2\mathtt{*z+}y\mathtt{=}x_1$

Wichtige repräsentierbare Funktionen

- **Multiplikation** $\mathtt{MUL}(x_1, x_2, y) \equiv y\mathtt{=}x_1\mathtt{*}x_2$
- **Vergleich** $\leq$ *(Hilfsprädikat für Funktionsbeschreibungen)* $\mathtt{LE}(x, y) \equiv \exists \mathtt{z}.\, x\mathtt{+z=}y$

  $<$ $\mathtt{LT}(x, y) \equiv \mathtt{LE}(\mathtt{s}(x), y)$
- **Subtraktion** $\mathtt{SUB}(x_1, x_2, y) \equiv x_1\mathtt{=}x_2\mathtt{+}y \;\vee\; (\mathtt{LE}(x_1, x_2) \wedge y\mathtt{=}\overline{\mathtt{0}})$
- **Division** $\mathtt{DIV}(x_1, x_2, y) \equiv \exists \mathtt{z}.\, \mathtt{LT(z,}x_2\mathtt{)} \wedge x_2\mathtt{*}y\mathtt{+z=}x_1$

  Divisionsrest/Modulo

  $\mathtt{MOD}(x_1, x_2, y) \equiv \mathtt{LT}(y, x_2) \wedge \exists \mathtt{z}.\, x_2\mathtt{*z+}y\mathtt{=}x_1$
- **Teilbarkeit** *(Prädikat)* $\mathtt{DIVIDES}(x_1, x_2) \equiv \exists \mathtt{z}.\, x_1\mathtt{*z=}x_2$

  Primzahleigenschaft *(Prädikat)*

  $\mathtt{PRIME}(x) \equiv \forall \mathtt{y.(LT(y,}x\mathtt{)} \wedge \mathtt{LT(}\overline{\mathtt{1}}\mathtt{,y))} \Rightarrow \neg\mathtt{DIVIDES(y,}x\mathtt{)}$

Wichtige repräsentierbare Funktionen

- **Multiplikation** $\mathtt{MUL}(x_1, x_2, y) \equiv y\mathtt{=}x_1\mathtt{*}x_2$
- **Vergleich** $\leq$ *(Hilfsprädikat für Funktionsbeschreibungen)* $\mathtt{LE}(x, y) \equiv \exists \mathtt{z}.\, x\mathtt{+z=}y$

  $<$ $\mathtt{LT}(x, y) \equiv \mathtt{LE}(\mathtt{s}(x), y)$
- **Subtraktion** $\mathtt{SUB}(x_1, x_2, y) \equiv x_1\mathtt{=}x_2\mathtt{+}y \;\vee\; (\mathtt{LE}(x_1, x_2) \wedge y\mathtt{=}\overline{\mathtt{0}})$
- **Division** $\mathtt{DIV}(x_1, x_2, y) \equiv \exists \mathtt{z}.\, \mathtt{LT(z,}x_2\mathtt{)} \wedge x_2\mathtt{*}y\mathtt{+z=}x_1$

  Divisionsrest/Modulo

  $\mathtt{MOD}(x_1, x_2, y) \equiv \mathtt{LT}(y, x_2) \wedge \exists \mathtt{z}.\, x_2\mathtt{*z+}y\mathtt{=}x_1$
- **Teilbarkeit** *(Prädikat)* $\mathtt{DIVIDES}(x_1, x_2) \equiv \exists \mathtt{z}.\, x_1\mathtt{*z=}x_2$

  Primzahleigenschaft *(Prädikat)*

  $\mathtt{PRIME}(x) \equiv \forall \mathtt{y.(LT(y,}x\mathtt{)} \wedge \mathtt{LT(}\overline{\mathtt{1}}\mathtt{,y))} \Rightarrow \neg\mathtt{DIVIDES(y,}x\mathtt{)}$

Repräsentierbarkeit in $\mathcal{Q}$ ist Turing-mächtig

– Alle μ-rekursiven Funktionen sind repräsentierbar in $\mathcal{Q}$ ↦ Anhang

Weitere Modelle für Berechenbarkeit

- **Abakus**
  - Erweiterung des mechanischen Abakus: beliebig viele Stangen / Kugeln
  - Zwei Operationen: Kugel hinzunehmen / Kugel wegnehmen
- **Registermaschinen**
  - Direkter Zugriff auf endliche Zahl von Registern
  - Register enthalten (unbegrenzte) natürliche Zahlen
  - Befehle entsprechen elementarem Assembler
- **Mini-PASCAL / mini-JAVA**
  - Basisversion einer imperativen höheren Programmiersprache
  - Arithmetische Operationen, Fallunterscheidung, Schleifen
  - Operationale Semantik erklärt Bedeutung der Befehle
- **Markov-Algorithmen**
  - Wie Typ-0 Grammatiken, aber mit fester Strategie für Regelanwendung
  - Verarbeitet Eingabeworte, statt mit einem Startsymbol zu beginnen

Alle Modelle sind ebenfalls Turing-mächtig

Die Churchsche These

- **Alle Berechenbarkeitsmodelle sind äquivalent**
  - Keines kann mehr berechnen als Turingmaschinen
  - Es ist keine Funktion bekannt, die man intuitiv als berechenbar ansieht, aber nicht mit einer Turingmaschine berechnen kann

Die Churchsche These

- **Alle Berechenbarkeitsmodelle sind äquivalent**
  - Keines kann mehr berechnen als Turingmaschinen
  - Es ist keine Funktion bekannt, die man intuitiv als berechenbar ansieht, aber nicht mit einer Turingmaschine berechnen kann
- **These von Alonzo Church: Die Klasse der Turing-berechenbaren Funktionen ist identisch mit der Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen**

Die Churchsche These

- **Alle Berechenbarkeitsmodelle sind äquivalent**
  - Keines kann mehr berechnen als Turingmaschinen
  - Es ist keine Funktion bekannt, die man intuitiv als berechenbar ansieht, aber nicht mit einer Turingmaschine berechnen kann
- **These von Alonzo Church: Die Klasse der Turing-berechenbaren Funktionen ist identisch mit der Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen**
  - **Unbeweisbar**e, aber wahrscheinlich richtige Behauptung
  - **Arbeitshypothese** für theoretische Argumente, die es ermöglicht, in Beweisen intuitiv formulierte Programme anstelle von konkreten Turingmaschinen zu verwenden

Berechenbarkeitsmodelle im Rückblick

- **Es gibt viele äquivalente Modelle**
  - Maschinenbasierte Modelle: Turingmaschinen, Registermaschinen, ...
  - Programmiersprachenbasierte Modelle: Mini-PASCAL, Mini-Java, ...
  - Abstrakte mathematische Beschreibung: rekursive Funktionen
  - Funktionale Programmierung: λ-Kalkül
  - Logische Programmierung: Arithmetische Repräsentierbarkeit
- **Alle Berechenbarkeitsmodelle sind i.w. äquivalent**
  - These: Alle berechenbaren Funktionen sind Turing-berechenbar (oder rekursiv, λ-berechenbar, arithmetisch repräsentierbar, ...)
  - Die Theorie des Berechenbaren hängt nicht vom konkreten Modell ab, sondern basiert auf allgemeinen Eigenschaften, die alle Modelle (implizit) gemeinsam haben

ANHANG

Repräsentierbarkeit in $\mathcal{Q}$ ist Turing-mächtig (I)

Definiere Min-rekursive Funktionen

Definition rekursiver Funktionen ohne primitive Rekursion

- $\mathcal{R}_{min}$: **Menge der min-rekursiven Funktionen**
  - – Addition, Nachfolger, Projektions- oder Konstantenfunktion sowie
  - – Alle Funktionen, die aus min-rekursiven Funktionen durch Komposition oder Minimierung entstehen
- $\mathcal{R}_{min} \subseteq \mathcal{R}$: min-rekursive Funktionen sind μ-rekursiv
  - – Offensichtlich, da Addition μ-rekursiv ist
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_{min}$: μ-rekursive Funktionen sind min-rekursiv
  - – Beschreibe Abarbeitung des Stacks einer primitiven Rekursion
  - – Suche nach erstem erzeugten Stack der Länge 1 (Details aufwendig)

Repräsentierbarkeit in $\mathcal{Q}$ ist Turing-mächtig (II)

Alle min-rekursiven Funktionen sind repräsentierbar

- **Nachfolgerfunktion s:** $\mathsf{S}(x,y) \equiv y{=}\mathsf{s}(x)$
- **Projektionsfunktionen pr^n_m:** $\mathsf{PR}^n_m(x_1,..,x_n,y) \equiv y{=}x_m$
- **Konstantenfunktion c^n_m:** $\mathsf{C}^n_m(x_1,..,x_n,y) \equiv y{=}\overline{m}$
- **Addition add:** $\mathsf{ADD}(x_1,x_2,y) \equiv y{=}x_1{+}x_2$
- **Komposition $f \circ (g_1,..,g_n)$:**

$$H(\vec{x},z) \equiv \exists y_1,..,y_n.(G_1(\vec{x},y_1) \wedge .. \wedge G_n(\vec{x},y_n) \wedge F(y_1,..,y_n,z))$$

H repräsentiert $f \circ (g_1,..,g_n)$, wenn $F, G_1, ..G_n$ Repräsentationen von $f, g_1, .., g_n$

- **Minimierung $\mu[f]$:**

$$H(\vec{x},y) \equiv \forall \mathtt{w}.\,\mathsf{LE}(\mathtt{w},y) \Rightarrow [F(\vec{x},y,\overline{0}) \Leftrightarrow \mathtt{w}{=}y]$$

H repräsentiert $\mu[f]$, wenn F Repräsentation von f